

M. RIAT

GRUNDLAGEN DER MUSIK

VERSION 1.3 PDF
M. Riat: riat@pobox.com
BORRIANA, SOMMER 2002

INHALTSVERZEICHNIS

ANMERKUNG DES VERFASSERS	3
VORWORT	7
EINFÜHRUNG	10
DIE SAITE ALS TONERZEUGER	27
TONÜBERLAGERUNG	41
GRAPHISCHE DARSTELLUNG DES TONS UND MASSEINHEITEN	48
DAS GEHÖR	62
DER SATZ VON FOURIER	74
TONERZEUGUNG IN MUSIKALISCHEN INSTRUMENTEN	81
DIE KLANGFARBE	91
DIE REPRODUKTION DES SCHALLS	103
DIE MUSIKALISCHEN TONLEITERN	135
ELEKTROAKUSTISCHE INSTRUMENTE	164
ANHANG: DAS STIMMEN EINES KLAVIERS	171
ANHANG: SYNÄSTHESIE	179
ANHANG: DER DOPPLER-EFFEKT	182
ANHANG: EIN PROGRAMM IN PASCAL	190
HISTORISCHER ÜBERBLICK	206
BIBLIOGRAPHIE	215
BIOGRAPHISCHE ANGABEN	220
ALPHABETISCHES VERZEICHNIS	231
DANKSAGUNGEN	238

ANMERKUNG DES VERFASSERS

Mein Vater war Musiker und meine ganze Kindheit war von klassischer Musik durchzogen. Das erklärt vermutlich mein lebhaftes Interesse für alles, was mit dieser Kunst zusammenhängt. Als anfangs der Achtzigerjahre ein Fachmann mein Klavier stimmen kam, stellte ich diesem ein paar Fragen über seine Kunst, und der Mann war so freundlich, mir ein paar der akustischen Eigenheiten des Instruments vorzuführen, die ich noch nicht kannte. Unter anderem erwähnte er die Obertöne und die Schwebungen, die ich in den darauffolgenden Tagen nach einiger Anstrengung hören konnte.

Voller Wissensdrang begab ich mich in meine Stammbuchhandlung, in der Absicht, ein Buch über alle diese interessanten Phänomene zu erwerben. Ich fand aber keine Einführung in dieses Thema, welche nicht entweder trivial oder aber so komplex waren, dass sie den Spezialisten vorbehalten waren. Eines Tages fand ich in der Zentralbibliothek von Barcelona ein paar Werke, die meine Ansprüche befriedigten. Aber es handelte sich ausschliesslich um vergriffene Werke; und keines derselben war in katalanischer Sprache abgefasst.

Damals begann ich mit dem Gedanken zu spielen, selber eines zu schreiben.

Die von nicht spezialisierten Autoren verfassten populärwissenschaftlichen Werke sind oft besser an die Bedürfnisse des Laien angepasst, da es einem Spezialisten oft schwerfällt, sich einem Unkundigen gegenüber verständlich auszudrücken.

Ich begann verschiedene Werke über das Thema zu lesen, machte mir Notizen und ordnete diese mittels Karteikarten, schön von Hand, da ich damals noch keinen Computer besass. Und eines Tages begann ich, die ersten Textfragmente mit einer romantischen Schreibmaschine niederzuschreiben, da die hohen Preise mich immer noch von der Anschaffung eines Computers abhielten. Schliesslich begann ich, meine Fragmente zu ordnen, noch hängige Themen hinzuzufügen, überflüssigen Text auszumerzen und schliesslich die Seiten zu nummerieren. Die schematischen Zeichnungen verschob ich auf später und fertigte vorläufig erst mal ganz einfache Skizzen an.

Ich plante folgendes: ich würde einen Verleger suchen und andererseits die Auflage durch Einschleusen von Inseraten von Firmen, die mit dem Thema in Einklang standen, mitfinanzieren. Dabei dachte ich etwa an Musikalienhändler, Klavierhäuser oder Schallplattengeschäfte.

Einstweilen übergab ich mehreren Verlegern je eine Photokopie meines unkorrigierten Manuskripts und versuchte gleichzeitig, Kunden zu finden, die in meinem Buch inserieren würden. Dieses System hätte es mir erlaubt, das Buch zu einem erschwinglichen Preis anzubieten, denn kleine Auflagen kommen immer teurer zu stehen als grosse und ich sah ein, dass dieses Buch nicht in grossen Mengen verkauft werden würde.

Aber ich fand nicht genug Inserenten und keiner der Verleger, an die ich mich gewandt hatte, war bereit, sich am Projekt zu beteiligen. Und ich erinnerte mich, wie bei meinem ersten Buch "Tèchniques gràfiques"¹ aller Ärger angefangen hatte, als ich das Manuskript der Druckerei zum Satz abgeliefert hatte. So legte ich meine Arbeit zu den Akten, wie ich vermutete, für immer.

Aber im Jahr 1999, nach der Anschaffung eines Programms *Microsoft Word*, das es erlaubte, die graphischen Darstellungen in den Text einzubetten, beschloss ich, die ganze Arbeit jener Epoche auf eine Computerdatei zu übertragen. So könnte ich das Buch an die interessierten Leute verteilen, indem ich ihnen eine Diskette zusandte oder indem ich ihnen die Datei ganz einfach per E-Mail zukommen liesse. Danach kann jeder das Buch in einem Drucker ausdrucken, oder es am Bildschirm lesen.

Die vorliegende Version ist eine PDF-Version, so dass die Dateien nicht mehr an das *Windows*-System gebunden sind. Die Daten dürfen unter den folgenden Bedingungen gebraucht werden:

BEDINGUNGEN

Der vorliegende Text darf frei vertrieben werden, sofern die folgenden Bedingungen eingehalten werden:

Die Originaldateien dürfen nicht abgeändert werden.

Die Daten dürfen nicht im Zusammenhang mit einem kommerziellen Produkt vertrieben werden, auch nicht auszugsweise.

Der Text und das Bildmaterial dürfen ausschliesslich für nicht lukrative Zwecke, wie etwa für den Unterricht verwendet werden.

¹ Graphische Techniken.

Wird der Text oder das Bildmaterial ganz oder teilweise für kulturelle, didaktische oder andere Zwecke verwendet, so ist die Herkunft zu erwähnen und auf die vorliegenden Bedingungen hinzuweisen.

Obwohl ich ein leidenschaftlicher Verfechter des qualitativ einwandfreien typographischen Satzes bin und ich immer stärker an das geschriebene Wort gebunden sein werde als an die elektronischen Medien, habe ich beschlossen, diese kleine Monographie unter dieser Form zu vertreiben, da uns die modernen Techniken Möglichkeiten zum Vertrieb und zur Variierung in die Hand geben, die die Mittel des gedruckten Textes zweifelsohne weit übertreffen. Im gleichen Sinne, wie die alten Amanuenser der Geburt der Druckerei mit beweglichen Typen mit Misstrauen begegneten, beobachtet heute mancher Verteidiger der klassischen Typographie die Entwicklung der letzten 20 oder 30 Jahre argwöhnisch. Aber ich glaube, auch im Umgang mit den neuen Techniken wird sich eine gewisse Ästhetik und eine Tradition einspielen, die zur Erschaffung von qualitativ hochstehenden Werken führen wird.

Und die Geburt einer neuen Technik bedeutet nicht unbedingt eine Überbietung des herkömmlichen Verfahrens, aber in diesem Fall ist uns eine Freiheit beschieden, die uns über die Grenzen der traditionellen Prozedur helfen. Die Typographie hat in keinem Moment die wertvolle und noble Arbeit der alten Kopisten entwürdigt, die manchmal ein ganzes Leben dem Bedecken der Pergamentseiten eines einzigen Buches mit ihrer minuziösen Kaligraphie widmeten.

Ich habe das Programm *Word* von *Microsoft* vor allem wegen seiner grossen Verbreitung ausgewählt, die eine zukünftige Kompatibilität gewährleistet. Ich habe den Text so gestaltet, dass er mit einem Ink-Jet- oder Laser-Drucker auf Papier des Formats DIN A4 abgedruckt werden kann. Die vorliegende PDF-Version ist nun nicht mehr an *Windows* gebunden.

Obwohl es sich um einen herkömmlichen Text handelt, habe ich versucht, diesen ein wenig im Sinne eines Hypertextes anzulegen, und zwar im folgenden Sinn: Die einzelnen Kapitel stellen zuerst die verständlichsten Konzepte dar, die dann allmählich vertieft werden. Die Lektüre der darauffolgenden Kapitel kann auch dann weitergeführt werden, wenn man den vorangehenden Stoff nicht gänzlich verstanden hat.

Dieser Text ist nicht bestrebt, einen Akustik- oder Musikkurs darzustellen. Mein Ziel bestand lediglich darin, einen Versuch zu verfassen, der den Leser in die verschiedenen Themen, um die sich dieses Buch dreht, einführt.

Ich bitte alle Leser, mir ihre Kommentare, Vorschläge und Korrekturen zukommen zu lassen, am besten per E-Mail. Die Mitarbeiter werden in der nächsten Ausgabe am Schluss des Buches erwähnt.

VORWORT

Von allen Künsten gilt die Musik als die abstrakteste, die am wenigsten greifbare. Seit der Erfindung des Buchdruckes im XV Jh., hat sich die westliche Kultur allmählich immer stärker einer auf dem Gesichtssinn begründeten Denkweise zugewandt, unter allmählicher Ausschaltung der anderen Sinnesorgane. Um etwa wissenschaftliche Zusammenhänge klar darzustellen oder um ein Computerprogramm zu entwickeln, erstellen wir eine graphische Darstellung, im Bewusstsein, dass ein Bild tausend Wörtern gleichkommt.

Wir haben uns derart an diese Vorzugsstellung des Sehorgans gewöhnt, dass wir mitunter leicht der Versuchung verfallen, unsere anderen Sinnesorgane als Wahrnehmungsquellen zweiter Ordnung einzustufen. Das Beispiel der Blinden zeigt uns, wie vor allem die Leistungsfähigkeit des Gehörs und des Tastsinnes stark verbesserungsfähig sind, wenn man sie nur einem systematischen und sorgfältigen Training unterwirft. Dieses Buch ist nicht ein Musikbuch im herkömmlichen Sinne, da es sich im Wesentlichen darauf beschränkt, die physikalischen, mathematischen, anatomischen, physiologischen, psychologischen und technischen Grundlagen der Musik zu erläutern, ohne von der Musik selber zu sprechen, jener Kunst, die auf den hier besprochenen Prinzipien beruht. Aber es handelt sich auch nicht um ein wissenschaftliches, nur Fachleuten zugängliches Buch, ganz im Gegenteil: es ist ein populärwissenschaftliches Werk und richtet sich an alle Leute mit einer mittleren Bildung, die sich die Kenntnis einiger grundsätzlichen Begriffe im Bereich der musikalischen Akustik aneignen wollen, ohne sich übermässig anzustrengen.

Die ausserordentliche Zunahme des menschlichen Wissens in den letzten zweihundert Jahren erforderte täglich eine zunehmende Spezialisierung aller Wissenschaftler. Die ausserordentlich entwickelten Wissenschaften wie etwa die Physik oder die Mathematik können heutzutage nicht mehr von einer einzelnen Person beherrscht werden, so dass es nach einem allgemeinen Studium des entsprechenden Fachs unmöglich ist, sich gleichzeitig in allen Sektoren einer bestimmten Wissenschaft weiterzubilden. Die grossen Universalgenies, wie zum Beispiel Leonardo da Vinci, die fast die gesamte Wis-

senschaft ihrer Epoche beherrschten, können heute nicht mehr existieren, hat doch der menschliche Geist auch seine Grenzen. Das XIX Jh. brachte die letzten Universalgenies hervor, wie etwa Helmholtz. Will heutzutage eine gebildete Person über eine grosse Anzahl Themen informiert sein, bleibt ihm nichts anderes übrig, als nach populärwissenschaftlichen Werken oder nach Enzyklopädien zu greifen; möchte er ausschliesslich streng wissenschaftliche Werke lesen, würde er nicht lange genug leben, um einen allgemeinen Überblick über die Welt, in der er lebt, zu gewinnen.

Für jeden gebildeten Menschen wird es stets besonders interessant sein, über ein minimales Kenntnis der greifbaren Strukturen, die uns umgeben, zu verfügen, wie etwa die akustischen Erscheinungen, unter vielen anderen Themen. Wer hat sich nicht ab und zu die Frage gestellt, wie es möglich sei, dass man inmitten von lautem Geschwätz dem Gespräch einer ganz bestimmten Person folgen kann? Wie ist es möglich, dass eine einzelne Schallplattenrinne die gesamte Information enthält, die dem Schall verschiedener gleichzeitig erklingenden Musikinstrumenten entspricht? Oder auch: wie kommt es, dass man das Klopfen an die eigene Türe vom Klopfen an des Nachbarn Türe unterscheiden kann? Der aufmerksame Leser dieser Schrift wird unter vielen anderen Erklärungen auch Antworten zu diesen Fragen finden.

Gewisse gleiche Konzepte werden in verschiedenen Publikationen oft verschieden benannt und gewisse Begriffe werden auf verschiedene Konzepte angewandt. Die hier verwandte Terminologie ist so nützlich, wie jede andere, wenn sie nur streng eingehalten wird. Ich denke hiermit etwa an die Definitionen der Begriffe "Partialtöne", "Obertöne", "harmonische Töne" und so weiter, die von einem Autor zum anderen abweichen.

In Anbetracht der Tatsache, dass dieses Buch unter anderem auch an Personen gerichtet ist, die mit mathematischen Formeln nicht vertraut sind, wurde dieser Text so strukturiert, dass der Leser die einzelnen Formeln alle übergehen kann, wie wenn es sich um Randbemerkungen handelte, ohne dadurch das Verständnis des qualitativen Inhaltes opfern zu müssen. Die wenigen Kapitel, die dazu eine Ausnahme bilden, da sie sich gerade mit dem quantitativen Aspekt des Stoffes befassen, wurden gegen Ende des Buches eingebaut. So sind zum Beispiel die Integrale im Kapitel 'DER SATZ VON FOURIER' nicht wesentlich für das Verständnis dieses Satzes, sondern vielmehr eine Demonstration der Rechnungen, die es erlauben, diesen Satz auf gewisse periodische mathematische Funktionen anzuwenden. Die Zahlentafeln weisen 5 oder 6 Dezimalstellen auf, viele mehr, als nötig wären, um die Tatsachen zu erläutern. Diese geradezu unver-

nünftige Präzision ist denjenigen Lesern gewidmet, die einzelne Rechnungen nachvollziehen wollen oder prüfen wollen, ob sie den dargestellten Stoff richtig verstanden haben. Aus demselben Grund wurde darauf verzichtet, die letzte Ziffer zu runden. Nach dieser Regel würde zum Beispiel der Wert 1,712829 als 1,71282 belassen, anstatt ihn auf 1,71283 zu runden, was der gegebenen Zahl genauer entspräche. Durch die bemerkenswerte Bindung, die zwischen der Musik und der Mathematik stets bestanden hat, wird das 'DIE MUSIKALISCHEN TONLEITERN' genannte Kapitel, das den arithmetischen Zusammenhang zwischen den in der westlichen Musik gebrauchten Musiknoten erläutert, genügend gerechtfertigt. Viele der grossen Komponisten zeigten ein reges Interesse an der Mathematik und umgekehrt.

Heute gilt Sauveur als der eigentliche Begründer der Akustik als selbständige Wissenschaft. Es ist beeindruckend, dass diese Würde gerade einem Menschen zukommt, der mit einem mit dem Thema verbundenen körperlichen Mangel behaftet war: Sauveur war nämlich bis ins Alter von 6 Jahren taubstumm, was ihn offenbar dazu herausforderte, einen grossen Teil seiner intellektuellen Fähigkeiten dem eingehenden Studium der mit seinem Gebrechen zusammenhängenden physikalischen Fragen zu widmen. Bis zur Erscheinung des Buches "Die Lehre von den Tonempfindungen" von Helmholtz bildeten Sauveurs Schriften die solideste Basis der musikalischen Akustik. Andererseits bildet das Buch von Helmholtz die Grundlage der modernen Akustik, selbst wenn ein paar Dinge abgeändert wurden.

Der HISTORISCHE ÜBERBLICK soll uns einen Überblick über die Geschichte der musikalischen Akustik verleihen.

Die BIBLIOGRAPHIE beschränkt sich im Wesentlichen auf historisch relevante Bücher und erwähnt die heutzutage in Buchhandlungen erhältlichen Bücher im Allgemeinen nicht.

In den biographischen Angaben sollen die erwähnten Personen kurz kommentiert werden. Es wurden vor allem Personen ausgewählt, die nicht jedem wohlbekannt sind; in diesem Sinne fanden wir es unnötig, hier so berühmte Leute wie J.S. Bach oder Newton anzuführen.

Schliesslich kann das ALPHABETISCHE VERZEICHNIS, das sowohl als Personen-, wie als Sachregister funktioniert, manchem die Lektüre erleichtern, da dieses auf die Seiten verweist, auf denen die verschiedenen Personen oder Begriffe erwähnt, definiert oder erklärt werden.

EINFÜHRUNG

Ein MUSIKALISCHER TON ist durch seine Frequenz (Anzahl Schwingungen pro Sekunde) festgelegt. Er unterscheidet sich also von anderen Lauten durch seine Periodizität. Eine Musik-Note ist ein Name, der einem bestimmten Ton erteilt wird. Die Note kann einen Eigennamen haben (wie etwa Do, Re, Mi, oder C, D, E) oder durch ein abstraktes Symbol der internationalen musikalischen Notation vertreten sein.

Wie wir etwas weiter unten sehen werden, ist die Nomenklatur der Musiknoten nicht international. Wir werden hier aus praktischen und aus historischen Gründen die in den lateinischen Ländern übliche Notation gebrauchen, die ohne weiteres in die Deutsche Nomenklatur umbenannt werden kann. Schliesslich gilt Italienisch als die internationale Sprache der Musik. Diese Benennung der Noten wird mitunter als Solmisation bezeichnet und geht auf Guido d'Arezzo zurück.

Dieses System wurde nicht von einem Tag auf den anderen erfunden. Bis ungefähr zum Jahr 1000 wurden die liturgischen Gesänge in Form sogenannter Neumen niedergeschrieben, die vor allem aus mnemotechnischen Angaben über die Tonhöhenveränderungen bestanden, ohne jegliche rhythmischen Angaben, also ohne über die Dauer jedes einzelnen Tones zu informieren.

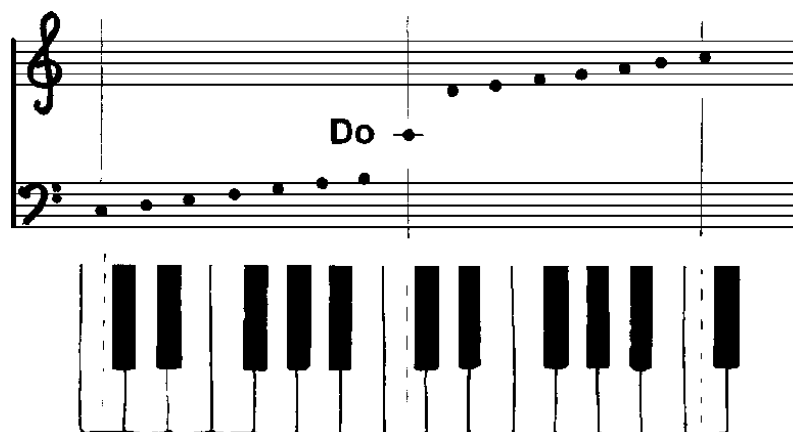
Offenbar führte der Mönch Hucbald im IX Jh. die erste horizontale Linie ein, die sich später zu unserem Notensystem aus fünf Linien entwickeln würde. Hucbald wird ferner die Vervollständigung einer alphabetischen Notation zugeschrieben, bei welcher er eine siebte Note mit dem griechischen Buchstaben Gamma bezeichnete. Daher stammt offenbar der italienische Name *gamma* für die Tonleiter, oder auch für eine einzelne Oktave aus derselben. Auf französisch haben wir auch das Wort *gamme*.

Einem anderen Mönch, Guido d'Arezzo, wird die Einführung des Notensystems auf vier Linien zugeschrieben. Von ihm stammt auch die heutzutage in den lateinischen Ländern gebräuchliche Nomenklatur der Noten, die von einer Hymne an Sankt Johannes den Täufer abgeleitet wurden:

UT *queant laxis*
 REsonare *fibris*
 MIRA *gestorum*
 FAMuli *tuorum*
 SOLve *polluti*
 LABii *reatum*
 Sancte *Iohannes*

Mit der Ausnahme Frankreichs ersetzten alle Länder später das Ut durch das Do. Auch scheint sich der Name Si erst ab dem XVI Jh. durchgesetzt zu haben. Erst im XVI Jh. wurden sich die Musiker über das heutige Fünfliniensystem einig und Frescobaldi benutzte offenbar noch ein System mit acht Linien.

Das Fünfliniensystem wird stets von einem sogenannten Schlüssel eingeleitet, von dem wir die Stellung der Note Do (oder C) ableiten können. Hier seien nur die beiden wichtigsten Schlüssel angegeben,



Klaviatur

nämlich der Sol-Schlüssel (G-Schlüssel), G , und der Fa-Schlüssel (F-Schlüssel), F . In Klavierpartituren, die üblicherweise aus zwei Liniensystemen bestehen, einem für jede Hand, entspricht der Sol-Schlüssel meist der rechten, der Fa-Schlüssel meist der linken Hand, so dass die Note Do zwischen die beiden Liniensysteme auf eine gemeinsame Hilfslinie zu liegen kommt.

Um die Figur nicht zu überlasten wurden nur die den weissen Tasten entsprechenden Noten aufgezeichnet. Zwischen den Tasten Do und Re befindet sich eine schwarze Taste, die zugleich das um einen Halbton erhöhte Do, das Do #, und das um einen Halbton erniedrigte Re, Re \flat darstellt. In der musikalischen Notation wird das entspre-

chende Zeichen, die Diesis, #, respektive das Vertiefungszeichen, ♭, der Note vorangestellt². Dasselbe geschieht mit dem Re #, das zugleich Mi ♭ ist, usw. Ein weiteres Zeichen, das Auflösungszeichen (♮), hebt die Änderung der Note wieder auf. Nun müssen wir uns fragen: Was hat es denn für einen Sinn, zwei gleiche Noten mit zwei verschiedenen Namen zu benennen? Ganz einfach: die beiden Noten sind gar nicht gleich, obwohl sie auf einer Klaviertastatur durch die gleiche Taste vertreten werden. Wie ist das zu verstehen?

Die gleichmässig temperierte Tonleiter (besser: gleichmässig temperierte Stimmung), die heute fast ausschliesslich zum Stimmen der Tasteninstrumente angewandt wird ist eine verhältnismässig neue Errungenschaft und Johann Sebastian Bach schuf eine der brilliantesten praktischen Anwendungen dieses Systems mit seinem fundamentalen Werk "Das Wohltemperierte Klavier", das aus zwei Sätzen von je 24 Präludien und Fugen in allen verschiedenen Dur- und Molltonarten aufgebaut ist.

Was die Tonleitern von Pythagoras und Zarlino anbelangt, um nur die beiden wichtigsten zu nennen, so war es unmöglich ein Tasteninstrument so zu stimmen, dass darauf Musik in allen verschiedenen Tonarten befriedigend wiedergegeben werden konnte. Schon bald einmal wurden angenäherte Stimmsysteme, sogenannte Temperaturen, entwickelt, die es erlaubten, das Do # mit dem Re ♭, auf eine gleiche Taste zu vereinen, usw. Solche Systeme ermöglichten die befriedigende musikalische Wiedergabe in den vier oder fünf üblichsten Tonarten. Die Einführung der gleichmässig temperierten (oder gleichstufig temperierten) Stimmung, die schon früher vorgeschlagen worden war, verdanken wir hauptsächlich J.S. Bach und Werckmeister.

Die mathematische Konstruktion der gleichmässig temperierten Tonleiter wird folgendermassen vorgenommen:

Man geht von einer beliebigen Note der Tonleiter aus, beispielsweise vom La (A), das auf die gewünschte Höhe gestimmt wird, beispielsweise 440 Schwingungen pro Sekunde (440 Hz), in unserer Nomenklatur La (3) benannt. Um die Schwingungszahl jeder einzelnen der darauffolgenden Noten zu bestimmen, wird nacheinander die Schwingungszahl jeder Note mit der Konstanten k multipliziert, wobei k die zwölfte Wurzel aus 2 (1,05946...) darstellt, also jene Zahl, die zwölf mal mit sich selber multipliziert die Zahl 2 ergibt. Man sagt, 2 sei die zwölfte Potenz von k . So finden wir nach 12

² Da ich die entsprechenden Symbole nicht in den mit Windows mitgelieferten Schriften gefunden habe, habe ich ein paar der Symbole des Schriftsatzes Bach von Dr. Yo Tomita in die Word-Datei aufgenommen, mit freundlicher Bewilligung des Autors.

Schritten einen Ton, der genau der doppelten Schwingungszahl des Ausgangstons entspricht. Diese Note heisst Oktave des Ausgangstons und erhält bis auf einen Index oder ein graphisches Kennzeichen denselben Namen, wie die Ausgangsnote. In unserem Beispiel finden wir das La mit 880 Schwingungen pro Sekunde, das La (4).

Offensichtlich erhält man auf analoge Weise eine um einen Halbton niedrigere Note, indem man die Ausgangsnote durch die Konstante k dividiert. Ausgehend vom La (3) mit 440 Schwingungen pro Sekunde finden wir durch Anwendung dieses Verfahrens die folgenden Noten in der Oktave zwischen Do (3) und Do (4):

Note	Frequenz
Si # / Do	261,62
Do # / Re ♭	277,18
Re	293,66
Re # / Mi ♭	311,12
Mi / Fa ♭	329,62
Fa / Mi #	349,22
Fa # / Sol ♭	369,99
Sol	391,99
Sol # / La ♭	415,30
La	440
La # / Si ♭	466,16
Si / Do ♭	493,88
Si # / Do	523,25

Alle Noten ausserhalb dieser Grundoktave bilden Oktaven zu einer der Noten der Tafel; ihre Frequenzen sind also stets das Produkt oder der Quotient der Frequenz einer Note dieser Grundoktave mit 2, 4, 8, usw. Dies ist die mathematische Konstruktion der gleichmässig temperierten Tonleiter. Wie wir allerdings später sehen werden, ist dies nicht das System, das beim Stimmen eines Klaviers angewandt wird, da sich die Fehler zu stark anhäufen würden.

Wie schon gesagt, ist die Nomenklatur der Noten in den verschiedenen Ländern nicht einheitlich. Die folgende Tafel fasst die Nomenklatur in den verschiedenen Sprachen³ kurz zusammen:

	Italienisch	Französisch	Deutsch	Englisch
Do	Do	Ut	C	C
Re	Re	Ré	D	D
Mi	Mi	Mi	E	E
Fa	Fa	Fa	F	F
Fa #	Fa diesis	Fa dièse	Fis	F #
Sol ♭	Sol bimolle	Sol bémol	Ges	G ♭
Sol	Sol	Sol	G	G
La	La	La	A	A
Si ♭	Si bimolle	Si bémol	B	B ♭
Si	Si	Si	H	B

Auch die Hinweise auf die Oktave, welcher eine bestimmte Note angehört, sind nicht einheitlich festgelegt. Hier werden wir folgende Abmachung treffen: Das zentral gelegene Do auf der Klaviertastatur mit der Frequenz 261,625 Hz (Schwingungen pro Sekunde) werden wir als Do (3) bezeichnen. Diesen Index werden wir auf alle Noten zwischen Do (3) und Si (3) anwenden. Tieferen Oktaven entsprechen tiefere Indizes und umgekehrt. Auf diese Weise entfaltet sich die Tastatur des Klaviers über alle in der Musik üblichen Frequenzen, die etwa von 20 bis zu 4000 Schwingungen pro Sekunde reichen.

³ Die in Deutschland und den angelsächsischen Ländern üblichen Notationen haben ihren Ursprung bereits im IX Jh. Das Si und das Si ♭ wurden anfänglich beide mit dem Buchstaben 'b' bezeichnet, wobei für das Si ein 'b' mit rechteckigem Profil verwandt wurde, während das Si ♭ durch ein rundes 'b' dargestellt wurde. Das rechteckige 'b', welches das Si vertrat wurde später in Deutschland mit einem 'h' verwechselt. Eine andere Variante der rechteckigen Version des Buchstabens 'b' führte zum Auflösungszeichen \natural und eine weitere zum Kreuz #.

Note	Frequenz	Note	Frequenz
		Do (3)	261,625
		Do #	277,182
		Re	293,664
		Re #	311,126
		Mi	329,627
		Fa	349,228
		Fa #	369,994
		Sol	391,995
		Sol #	415,304
La (-1)	27,500	LA (3)	440,000
La #	29,135	La #	466,163
Si	30,867	Si	493,883
Do (0)	32,703	Do (4)	523,251
Do #	34,647	Do #	554,365
Re	36,708	Re	587,329
Re #	38,890	Re #	622,253
Mi	41,203	Mi	659,255
Fa	43,653	Fa	698,456
Fa #	46,249	Fa #	739,988
Sol	48,999	Sol	783,990
Sol #	51,913	Sol #	830,609
La (0)	55,000	La (4)	880,000
La #	58,270	La #	932,327
Si	61,735	Si	987,766
Do (1)	65,406	Do (5)	1046,50
Do #	69,295	Do #	1108,73
Re	73,416	Re	1174,65
Re #	77,781	Re #	1244,50
Mi	82,406	Mi	1318,51
Fa	87,307	Fa	1396,91
Fa #	92,498	Fa #	1479,97
Sol	97,998	Sol	1567,98
Sol #	103,826	Sol #	1661,21
La (1)	110,000	La (5)	1760,00
La #	116,540	La #	1864,65
Si	123,470	Si	1975,53
Do (2)	130,812	Do (6)	2093,00
Do #	138,591	Do #	2217,46
Re	146,832	Re	2349,31
Re #	155,563	Re #	2489,01
Mi	164,813	Mi	2637,02
Fa	174,614	Fa	2793,82
Fa #	184,997	Fa #	2959,95
Sol	195,997	Sol	3135,96
Sol #	207,652	Sol #	3322,43
La (2)	220,000	La (6)	3520,00
La #	233,081	La #	3729,31
Si	246,941	Si	3951,06
		Do (7)	4186,00

Schliesslich sei erwähnt, dass in der internationalen musikalischen Notation die Darstellung jeder Note ihre Dauer im Verhältnis zu derjenigen der anderen angibt, je nachdem, ob sie als GANZE NOTE (♩), HALBNOTE (♪), VIERTELNOTE (♫), ACHELNOTE (♬), SECHZEHNTELNOTE (♭), usw. auftritt. Die Unterbrechungen zwischen den Noten werden mit den sogenannten Pausenzeichen angezeigt. Der ganzen Note entspricht hier das Zeichen ♩, den Noten zwischen der Halbnote und der Sechzehntelnote entsprechen nacheinander die Zeichen ♪, ♫, ♬ und ♭. Die Lautstärke wird meist mit den Symbolen "pppp" bis "ffff" angegeben.

Dieses Systems, das wir nur kurz skizziert haben, weist vor allem zwei Beschränkungen auf: Gewisse Intervalle, wie etwa Vierteltöne oder Sechsteltöne können nicht dargestellt werden und das System erlaubt es nicht, Hinweise auf die Klangfarbe der dargestellten Töne zu machen. Die Klangfarbe ist diejenige Eigenschaft eines Tons, die es uns erlaubt, ihn von einem Ton derselben Höhe, die von einem anderen Instrument erzeugt wurde, zu unterscheiden. Ein von einer Violine erzeugtes La unterscheidet sich also von dem auf einer Flöte erzeugten La durch die Klangfarbe. Später werden wir sehen, dass sich auch die verschiedenen durch die menschliche Stimme erzeugten Vokale grundsätzlich in ihrer Klangfarbe unterscheiden. Gewisse romantische und post-romantische Komponisten versuchten die Beschränktheit der musikalischen Notation durch oft suggestive und poetische Interpretationshinweise zu ergänzen. Ein schönes Beispiel dazu finden wir in der sechsten Klaviersonate, op. 62, die Scriabin um 1911 erschuf. Da heisst es unter anderem: "*mystérieux, concentré*", "*étrange, ailé*", "*avec une chaleur contenue*", "*souffle mystérieux*", "*onde caressante*", "*concentré*", "*le rêve prend forme*", "*l'épouvante surgit*", ...

Ein Vorgang, der sich nach einem bestimmten Zeitabschnitt T stets identisch wiederholt, heisst PERIODISCH. Die PERIODE T ist die Zeit, die zwischen zwei gleichen Zuständen im Ablauf des Vorganges verstreicht. Beispiele periodischer Vorgänge sind die aufeinanderfolgenden Mondphasen, die Bewegung des Pendels einer Uhr, der Gang eines Benzinmotors (falls dieser mit gleichbleibender Geschwindigkeit läuft) oder die Rotation eines Mühlrades.

Im Gebiet des hörbaren Klangs entsprechen die MUSIKALISCHEN TÖNE grundsätzlich periodischen Schwingungen (auch Vibrationen), während die nicht periodischen Schwingungen den sogenannten GERÄUSCHEN oder dem LÄRM entsprechen. Wie wir später sehen

werden, existiert keine strenge Trennung zwischen den musikalischen Tönen und den Geräuschen.

Offensichtlich hat ein Vorgang mit der Periode T auch die Perioden $2T$, $3T$, $4T$, ... Unter allen möglichen Perioden hat stets die kleinste den Vorrang.

Die Frequenz f eines periodischen Vorganges ist der Reziprokwert (auch: Kehrwert) der Periode, also $\frac{1}{T}$. Die im Zusammen-

hang mit Frequenzen wichtigste Einheit ist $\frac{1}{\text{Sekunde}} = 1 \text{ Hz}$ (von

Heinrich Hertz). Dreht sich beispielsweise der Rotor eines Motors 5 Mal in der Sekunde, hat dieser Vorgang eine Periode von 0,2 Sekunden und eine Frequenz von $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2 \text{ Sekunden}} = 5 \text{ Hz}$. Be-

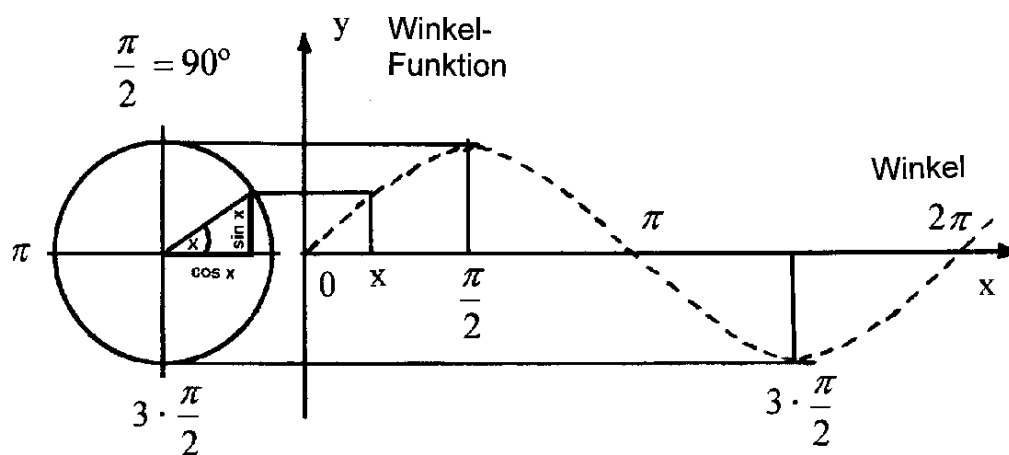
wegt sich ein Massenpunkt⁴ auf einer Strecke periodisch um einen Gleichgewichtspunkt hin und her, nennt man das eine SCHWINGUNG. Den Abstand des Massenpunktes vom Gleichgewichtspunkt zu einem bestimmten Zeitpunkt oder PHASE des schwingenden Massenpunktes nennt man ELONGATION. Die grösstmögliche Elongation wird als AMPLITUDE bezeichnet. Manchmal wird der Abstand zwischen den extremen Positionen des Massenpunktes als DOPPELTE AMPLITUDE bezeichnet.

Unter allen möglichen Schwingungen, die äusserst komplexe Gestalten annehmen können, nennt man die einfachste und zugleich wichtigste die HARMONISCHE SCHWINGUNG oder SINUSSCHWINGUNG. Es handelt sich dabei um die Vertikalprojektion eines Kreispunktes bei einer gleichmässigen Rotation auf eine zur Kreisebene senkrechte (auch: normale) Ebene. Oder etwas bildlicher ausgedrückt: wenn wir ein senkrechtes Rad, das sich regelmässig dreht von oben beleuchten, beschreibt der Schatten eines seitwärts auf dem Reifen angebrachten Punktes auf dem Boden eine harmonische Schwingung. Auch ein Gewicht, das an einer Spiralfeder aufgehängt wird beschreibt eine Sinusschwingung, wenn wir mal von dem Energieverlust⁵ durch Reibung absehen. Graphisch kann jede Schwingung in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, in dem die Abszissenachse (waagerechte oder x -Achse) der Zeit, die Ordinatenachse (senkrechte oder y -Achse) der Elongation entspricht. Die Elongation in jedem Moment wird als Funktion der Zeit aufgefasst. Die in der Figur wiedergegebene graphische Darstellung einer Si-

⁴ Der Massenpunkt ist ein mathematisches Modell zur Erklärung physikalischer Vorgänge.

⁵ Die Energie geht in Wirklichkeit nicht verloren; sie wird nur in andere Energieformen umgewandelt, vor allem in Wärmeenergie.

nusschwingung ist mit der Darstellung der Winkelfunktion Sinus (Symbol: sin) identisch.



Die Sinuskurve

In der Figur kann man ein rechtwinkliges Dreieck erkennen, dessen senkrechte Kathete dem sin des Winkels x , und dessen waagerechte Kathete dem Kosinus (Symbol: cos) entspricht. Die Hypotenuse entspricht dem Kreisradius.

Die meistgebräuchlichen Winkelmasse sind der GRAD und der RADIANT (Symbol: rad). Der Kreis wird in 360° (360 Grad) unterteilt⁶; ein rechter Winkel entspricht also 90° .

Beim System der Radianen wird der Winkel als Quotient zwischen dem entsprechenden Kreisbogen und dem Radius gemessen. Daher wird dieses Mass mitunter auch BOGENMASS genannt. Bei diesem System entspricht der Kreis einem Winkel von $2 \cdot \pi$ -rad (π ist der Quotient zwischen dem Umfang und dem Durchmesser jedes beliebigen Kreises, eine transzendente Zahl mit dem angenäherten Wert von 3,141592653589...).

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \cdot \text{rad}$$

Also hat 1 rad den angenäherten Wert von $57,295^\circ$.

Bei der Darstellung musikalischer Klänge wird üblicherweise ein Koordinatensystem eingesetzt, bei dem der Abszissenachse die Zeit t entspricht, die bei der Sinusschwingung proportional zum überstrichenen Winkel x ist, der in diesem Zusammenhang PHASENWINKEL genannt wird. Die Ordinatenachse, y , entspricht der Elongation zu jedem Zeitpunkt t . Man bezeichnet diese graphische Darstellung des Schalls als PHONOGRAPHISCHE KURVE. Bezeichnen wir den in einer Sekunde überstrichenen Winkel mit ω ⁷, ergibt sich

⁶ Das System, bei dem der Kreis in 400° (sogenannte Neugrade) unterteilt wird, scheint sich in der Praxis nicht durchzusetzen.

⁷ Omega.

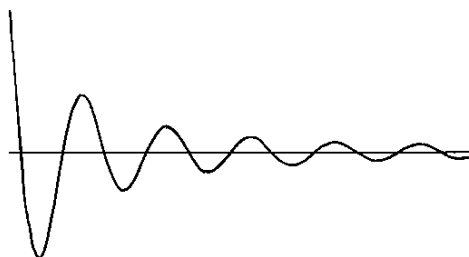
$$x = \omega \cdot t$$

Der Radius des Einheitskreises beträgt 1 und entspricht der grösstmöglichen Elongation, also der Amplitude der einheitlichen Sinuskurve. Wenn wir den Radius unseres Kreises auf den Wert A bringen, wird sich jeder Kurvenpunkt im gleichen Verhältnis wie der Radius verändern, und wir finden für die Elongation in einem beliebigen Zeitpunkt t, also für den Ordinatenwert, der dem Punkt t der Abszissenachse entspricht, den Ausdruck:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

In dieser Formel stellt A zugleich den Radius des Kreises und die Amplitude (grösste Elongation) der Schwingung gleichzeitig dar.

Die Amplitude der Schwingung eines Objekts, wie etwa einer Stimmgabel, nimmt allmählich ab, da ein Teil der Energie durch die Reibung der Materialien in Wärme verwandelt wird. Die Frequenz der Schwingung verändert sich jedoch nicht, da die Frequenz eine Charakteristik des schwingenden Objekts ist und in diesem Zusammenhange als EIGENFREQUENZ bezeichnet wird. Diese allmähliche Abnahme der Amplitude, die wir täglich immer wieder beobachten können, zum Beispiel bei einem Klavierton, der allmählich abnimmt oder bei der Schwingung eines Pendels, wird als PFUNG bezeichnet. Die Dämpfung kann durch Energiezufuhr kompensiert werden. Man spricht dann von einer UNTERHALTENEN SCHWINGUNG. Die Wirkung derselben ist optimal, wenn sie im Rhythmus, der der Eigenfrequenz



Dämpfung einer Schwingung

unseres schwingenden Körpers entspricht, zugeführt wird. Aber auch eine leicht von der Eigenfrequenz abweichende Frequenz vermag die Schwingungen zu unterhalten, da die beiden Objekte, das schwingende und dasjenige, das ihm Energie zuführt, ein gekoppeltes System bilden, bei dem allerdings Energie verloren geht.

Die Figur 'Wirksamkeit der Energiezufuhr' stellt graphisch den Wirkungsgrad der Energiezufuhr mit der Frequenz f auf ein Objekt mit der Eigenfrequenz f_0 dar, wobei das Resultat vom Ausmass der Dämpfung abhängt. Hier wurde eine Kurve für eine mittlere und eine andere für eine kleine Dämpfung gezeichnet.

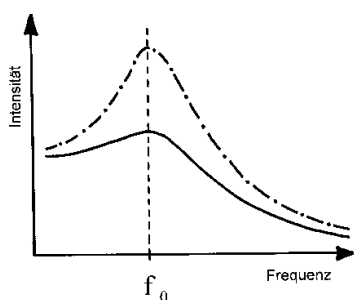
Die Erscheinung der Eigenschwingung tritt etwa dann auf, wenn wir ein in einem Loch festgefahrenes Auto zu befreien versuchen. Haben wir nicht genug Kraft, um es auf Antrieb hinauszufahren, bringen wir es in eine schwingende Bewegung, bis die Amplitude der Schwingung gross genug ist, um es aus dem Loch zu stossen.

Wird die Energie mit der Eigenfrequenz des schwingenden Objekts zugeführt, spricht man von RESONANZ. Resonanz kann extrem gefährlich werden, wenn sie bei gewissen Maschinen oder in der Architektur auftritt. Die Literatur weist uns auf Fälle hin, bei denen eine Brücke unter einer Gruppe Soldaten, die im Gleichschritt über sie hinwegmarschierten, einstürzte, obwohl sie für ein Mehrfaches des Gewichts vorgesehen war, da sie die Füsse in der Eigenfrequenz der Brücke absetzten.

Später werden wir auch sehen, dass es schwingende Körper mit mehreren Eigenfrequenzen gibt.

In jenen speziellen Fällen, bei denen die für den Unterhalt nötige Energiezufuhr durch die Schwingung selber kontrolliert wird, spricht man von RÜCKKOPPLUNG. Ein besonders wichtiges Beispiel von Rückkopplung, das mit unserem Thema zusammenhängt, bildet die von einem Bogen gestrichenen Violinsaiten. Um diese Art Bewegung besser zu verstehen wollen wir ein Modell gebrauchen: man stelle sich ein Förderband vor, so wie es bei der Kasse des Supermarkts zur Anwendung kommt. Auf dieses Band legen wir ein Objekt, zum Beispiel ein Paket, das über eine Spiralfeder mit einem starren Haken verbunden ist. Wird das Fließband in Bewegung gebracht, bewegt sich das Paket mit ihm fort, wobei die Feder mehr und mehr gespannt wird, bis die Kraft gross genug ist, um das Paket ruckartig in

Richtung des Hakens zurückzureissen. Fast augenblicklich haftet das Paket wieder fest auf dem Band und bewegt sich mit ihm fort. Die Haftreibung ist wesentlich grösser als die Gleitreibung. Der Vorgang wiederholt sich periodisch.

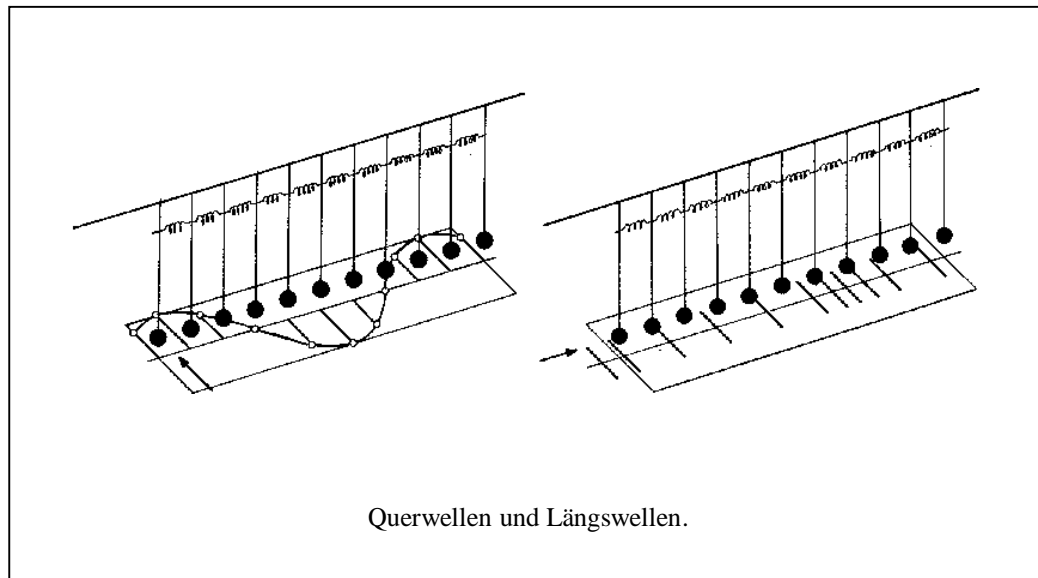


Wirkung der zugeführten Energie

Stellen wir den Abstand unseres Objekts vom Haken als Funktion der Zeit dar, erhalten wir eine Folge von Dreiecken. Im Falle der Violine entspricht die Saite unserem Paket und

der Bogen entspricht dem Fließband. Und die Kurven der von Streichinstrumenten hervorgebrachten Töne weisen eine ähnliche Zackenstruktur auf, wie die graphische Darstellung unseres Modells. Später wird diese Art Kurve noch ausführlicher besprochen werden.

Wird eine schwingende Bewegung im Raum von einem Partikel zur anderen fortbewegt, spricht man von einer WELLE. Betrachten wir in der Fortbewegungsrichtung einer Welle zwei bestimmte schwingende Partikeln, so stimmen deren Phasen nur dann überein,



wenn ihr Abstand dem von der Welle in der Periode T zurückgelegten Weg (oder einem ganzzahligen Mehrfachen desselben) gleichkommt.

Die beiden wichtigsten Arten mechanischer Wellen sind die QUERWELLEN und die LÄNGSWELLEN. Um beide Sorten darzustellen, verwenden wir ein einfaches Modell. Stellen wir uns zunächst eine Achse vor, auf der in gleichen Abständen eine Serie Pendel, bestehend aus einem steifen, vertikalen Stiel und einer Stahlkugel, so angebracht sind, dass sie sich nur quer zur Achse bewegen können. Die Stiele der Pendel sind untereinander in einer gewissen Höhe durch Spiralfedern oder Gummibändern verbunden (gekoppelt). Geben wir einem der Pendel einen seitlichen Anstoss, können wir das Entstehen einer Querwelle beobachten, die durch eine Folge von seitlichen Schwingungen charakterisiert ist. Lassen wir nun unser Modell in der Weise verändern, dass sich die Pendelstiele nur in der Ebene bewegen können, die sie mit der Achse gemeinsam haben. Geben wir nun einem der Pendel einen Impuls in Richtung der Achse, entsteht eine durch veränderliche Dichten in der Bewegungsrichtung charakterisierte Längswelle.

Sowohl Längs- wie auch Querwellen können sich in festen Medien fortpflanzen. Gase hingegen übermitteln hauptsächlich Längswellen. Mechanische Wellen können sich in eindimensionalen Medien fortpflanzen, wie etwa eine Welle, die sich auf einer Saite bewegt. Die durch einen fallenden Stein auf einer ruhigen Wasserober-

fläche erzeugte Welle pflanzt sich in der grundsätzlich zweidimensionalen Umgebung der Wasseroberfläche fort. Die akustischen Wellen aber pflanzen sich frei im dreidimensionalen Raum fortzubewegen. Die WELLENLÄNGE ist der kleinste Abstand zwischen zwei Partikeln, die sich in derselben Schwingungsphase befinden.

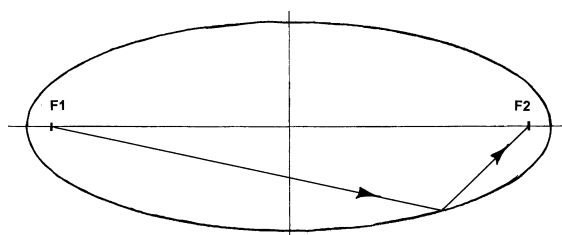
Die AUSBREITUNGSGESCHWINDIGKEIT v einer Welle ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine beliebige Phase fortbewegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird als Produkt der Frequenz f und der Wellenlänge L berechnet:

$$v = f \cdot L = \frac{L}{T}$$

Wellen, die durch Sinus-Schwingungen (harmonische Schwingungen) erzeugt werden, nennt man SINUS-WELLEN.

Wirft man einen Stein auf eine ruhige Wasseroberfläche, wird die vom Stein erzeugte Auf- und Abwärtsbewegung auf alle Partikeln der Umgebung übertragen und es bildet sich eine KREISWELLE. Wie schon Huygens beobachtete, ist die Kreisform das Resultat sämtlicher durch jeden einzelnen Punkt der Wasseroberfläche erzeugten Wellen. Streuen wir kleine Korkkügelchen auf die Wasseroberfläche, sehen wir leicht ein, dass die Bewegung vom Zentrum nach aussen nur scheinbar ist, schwingen doch die einzelnen Partikel ausschliesslich in senkrechter Richtung.

So wie sich die Wasserwellen auf der Seeoberfläche kreisförmig ausbreiten, haben die akustischen und die elektromagnetischen (Licht, Rundfunk,...) Wellen im Raum die Tendenz, sich kugelförmig auszubreiten, werden sie nicht künstlich gerichtet. Die Kugel



Spiegelungen im Innern einer Ellipse

bildet die dreidimensionale Analogie zum (zweidimensionalen) Kreis. Gerichtet können die Wellen etwa mit einer Art Trichter werden, der eine gewisse Analogie zu dem im Bereiche der Optik gebräuchlichen Parabolspiegel aufweist.

Betrachtet man ausschliesslich den Teil einer Welle, der sich auf einer bestimmten Geraden befindet, spricht man von einem STRAHL.

Alle Arten von Wellen, seien es Längs- oder Querwellen, mechanische oder elektromagnetische Wellen, weisen gewisse gemeinsa-

me Eigenschaften auf, von denen die wichtigsten REFLEXION (Spiegelung), REFRAKTION (Brechung) und DIFFRAKTION (Beugung) heissen.

Ändert ein Strahl an der Grenze zwischen zwei Substanzen (zum Beispiel Luft und Wasser) ihre Ausbreitungsrichtung, ohne von einem Stoff in den anderen zu dringen, spricht man von REFLEXION. In allen Fällen gilt das physikalische Gesetz: Der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallswinkel⁸.

Es muss zwischen ZWEI KATEGORIEN VON REFLEXION unterschieden werden: Die erste Kategorie entspricht demjenigen Fall unseres Pendel-Modells, bei dem sich hinter der letzten Kugel eine starre Wand befindet, während bei der zweiten Kategorie die letzte Kugel auf keinen Widerstand stösst. Die beiden Fälle unterscheiden sich durch eine Phasendifferenz.

Dringt der auftreffende Strahl durch die Substanzgrenze, meist unter einem Richtungswechsel, spricht man von REFRAKTION. Das von Snellius⁹ entdeckte Brechungs-Gesetz ist das folgende: der Sinus des Einfallswinkels verhält sich zum Sinus des Refraktionswinkels wie die entsprechenden Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Welle in den beiden Substanzen.

Meist finden beide Erscheinungen gleichzeitig statt: ein Teil des Strahls wird reflektiert, während ein anderer Teil gebrochen (refraktiert) wird.

Die Ebene, die den eintreffenden Strahl und den reflektierten Strahl enthält steht im Auftreffpunkt senkrecht zur Substanzgrenze und enthält ebenfalls den refraktierten Strahl.

DIFFRAKTION findet statt, wenn eine Welle neben einem Hindernis vorbei oder zwischen zwei Hindernissen hindurch muss. Wir können uns ein anschauliches Bild von der Diffraktion machen, wenn wir eine Wasserwelle beobachten, die gegen eine Mauer prallt, die nur durch eine kleine Spalte unterbrochen ist: auf der anderen Seite des Spaltes entsteht eine Fächerförmige Wellenstruktur.

In einer homogenen Umgebung pflegen sich die Wellen als konzentrische KUGELWELLEN fortzupflanzen. Daher kommt es, dass sich die Intensität eines Geräusches oder von Licht zum Quadrat des Abstandes von der Quelle umgekehrt proportional verhält, da die Oberfläche einer Kugel proportional zum Quadrat ihres Radius zunimmt.

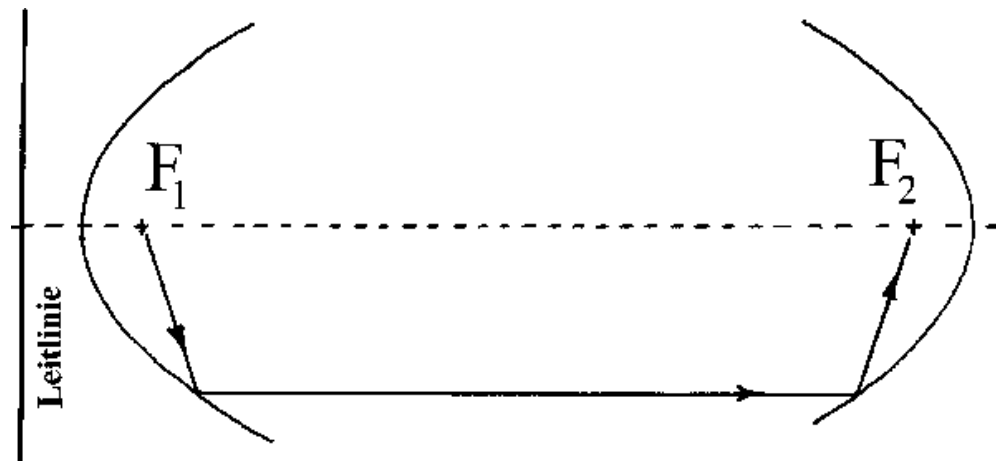
Eine Welle, die von einer grossflächigen Platte abgestrahlt wird mitunter als FLACHE WELLE bezeichnet und kann mit einer Kugelwelle mit sehr grossem Radius verglichen werden. Ein gutes Model

⁸ Einfalls- und Ausfallswinkel werden zwischen dem Strahl und der Senkrechten zur Substanzgrenze auf dem Auftreffpunkt gemessen.

⁹ Auch Willebrord Snel van Royen genannt.

einer flachen Welle ist die im Inneren eines Rohres fortgepflanzte Schallwelle. Eine flache Welle im strengen Sinne weist auf dem gesamten zurückgelegten Weg praktisch keine Energieverluste auf.

Durch die Eigenschaften der Fortpflanzung der Schallwellen ergeben sich viele Analogien zwischen der Akustik und der Optik. So spiegelt sich etwa der im Brennpunkt eines Rotationsparaboloids¹⁰ erzeugte Ton an der Innenfläche des Paraboloids und pflanzt sich in Form von parallelen Strahlen fort, wie eine flache Welle. Genau gleich wie bei der Parabolantenne des Fernsehens. Ein zweites Paraboloid kann symmetrisch zum ersten so aufgestellt werden, dass die Schallwellen in dessen Brennpunkt zusammentreffen, wo sie mit einem Mikrophon abgefangen werden können.



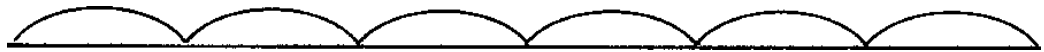
Seit der Renaissance sind verschiedene Kuppeln von Kathedralen bekannt, die es dank ihrem elliptischen Querschnitt erlauben, dass zwei in gegenüberliegenden Brennpunkten stehende Personen sich leise unterhalten können, während die Umstehenden nichts von ihrem Gespräch mitbekommen. Man spricht manchmal von Flüstergewölben.

Diese beiden Beispiele erinnern an entsprechende auf die Reflexion begründete optische Experimente. Auch zu den refraktären Eigenschaften des Lichtes gibt es analoge akustische Erscheinungen. Ein hervorragendes Beispiel hierfür bilden etwa die sogenannten akustischen Linsen. Wird etwa eine Schallquelle neben einen mit dem geeigneten Gas gefüllten Kinderballon aufgestellt, so wird man

¹⁰ Eine Parabel ist die Menge aller Punkte die von einem gegebenen Punkt (dem Brennpunkt) und einer gegebenen Geraden (der Leitlinie) je den gleichen Abstand haben. Jeder Strahl durch den Brennpunkt wird an der Parabel als ein zur Leitlinie normaler (senkrechter) Strahl reflektiert. Wird die Parabel um ihre Achse (die durch den Brennpunkt gehende Normale zur Leitlinie) gedreht, entsteht das Rotationsparaboloid.

diesen Ton in einer dem Ballon gegenüberliegenden Zone mit höchster Intensität vernehmen: hier wirkt der Ballon wie eine Annäherung an eine bikonvexe Linse.

Die Fortpflanzung einer Schallwelle auf einem gefrorenen Teich bildet ein anderes schönes Beispiel: Der Schall ist in einem wesentlich grösseren Abstand hörbar als dies etwa im Sommer auf einer Landstrasse der Fall wäre. Die Erklärung ist einfach: Zuerst werden die Wellen auf der Eisfläche gespiegelt. Diejenigen Strahlen, die bainahe horizontal verlaufen werden in den wärmeren Luftschichten als den unmittelbar an das Eis angrenzenden gebrochen, so dass sie später wieder auf der Eisfläche gespiegelt werden. Auf diese Weise entspricht der Energieverlust der Menge der Strahlen, die sich zwischen zwei Ebenen fortbewegen, also ungefähr demjenigen einer Kreiswelle.



Ein akustischer Effekt, den wir in seiner optischen Analogie dank der grossen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts nicht beobachten können ist der sogenannte NACHHALL oder REVERBERATION. Der Nachhall wird durch die wiederholte Reflexion der Schallwellen an den Wänden eines Raumes erzeugt; seine Dauer hängt von der Absorption der Schallwellen an den Wänden und von der Gestalt des Raumes ab. Die Dauer des Nachhalles, die willkürlich auf die Zeit festgelegt ist, die verstreicht, bis der erzeugte Klang 60 dB^{11} an Intensität verloren hat, bildet eine wichtige Charakteristik der Konzertsäle. Wie wir später sehen werden, entspricht die Abnahme des Schalls um 60 dB dem millionstel Teil der Lautstärke.

Je nach Bedarf des Saals (Symphoniekonzert, Theater, eine Rede,...) ist ein längerer oder kürzerer Nachhall erwünscht, der in gewissen Fällen 3 Sekunden überschreiten kann. Für eine Rede wird eine Zeit von 0,3 bis 0,4 s empfohlen, während für die Musik eine Zeit von einer bis zwei Sekunden besser geeignet ist. Aber für Orgelmusik sind längere Zeiten, wie wir sie in verschiedenen Kathedralen vorfinden, bestens geeignet. Diese spezifischen Anforderungen an den Nachhall haben zur Konstruktion von Sälen mit variabler Akustik geführt, bei denen etwa die Umkehrung einiger Deckenplatten zu einer total verschiedenen Nachhallzeit führen.

¹¹ Dezibel. Diese Einheit wird im Kapitel Graphische Darstellung des Tones und Masseinheiten genauer besprochen.

Die Nachhallzeit hängt im wesentlichen von drei Faktoren ab, nämlich dem Volumen des Saals, der inneren Oberfläche und dem Oberflächenmaterial. Um 1898 fand Sabine eine Formel, mit der sich in den meisten Fällen die Nachhallzeit in Funktion der erwähnten drei Faktoren errechnen lässt:

$$R = 0,16 \cdot \frac{V}{S \cdot a}$$

Hier bedeutet V das Volumen in Kubikmetern, S die Oberfläche in Quadratmetern und a den Absorptions-Koeffizienten des Materials, das die Wände bedeckt. Die Formel von Sabine bietet in den meisten Fällen eine gute Annäherung, aber es müssen die Effekte beachtet werden, welche ihre Gültigkeit beschränken. Eine wichtige Tatsache besteht darin, dass die Materialien nicht alle Frequenzen gleich gut absorbieren. Die hohen Frequenzen werden gewöhnlich vor den tiefen verschluckt. Aber es gibt Materialien, für welche diese Eigenschaft stärker ausgeprägt ist, als bei anderen. Die Temperatur und vor allem die Luftfeuchtigkeit verändern den Absorptions-Koeffizienten der Materialien. Ein Faktor, der beachtet werden muss, ist die Lautstärkenkurve, die der Schall durchläuft, bis er erlischt. Je nach der Form dieser Kurve kann eine gleiche Absorptionszeit vollständig verschiedene akustische Effekte bewirken. Und schliesslich muss beachtet werden, dass jede Frequenz einer anderen Lautstärkenkurve entspricht.

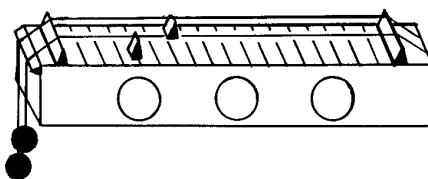
Die Einheit der akustischen Absorption 'sabin', die zu Ehren von Sabine so benannt wurde, wird folgendermassen definiert:

EIN SABIN IST DIE ABSORPTION, DIE EINEM QUADRATMETER
VOLLSTÄNDIG ABSORBIERENDEN MATERIALS ENTSPRICHT.

Wenn wir in einem Saal mitten in der Natur ein Fenster öffnen, erreichen wir denselben akustischen Effekt, wie wenn wir das Fenster mit vollständig absorbierendem Material abdecken. Aus diesem Gesichtspunkt können wir die Einheit Sabin auch so definieren: Ein Sabin ist die Absorption, die einem offenen Fenster von einem Quadratmeter Oberfläche entspricht.

DIE SAITE ALS TONERZEUGER

Das MONOCHORD ist das Instrument, das es zum ersten Mal erlaubte, Verbindungen zwischen der Musik und der Mathematik herzustellen, und die Ehre, zum ersten Mal die konsonanten Intervalle vom mathematischen Standpunkt aus erforscht zu haben, wird Pythagoras zugesprochen. Das Monochord, das eines der primitivsten Vorgänger der heutigen Saiteninstrumente wie der Violine oder des Klaviers bildete, wurde noch bis ins Mittelalter als Musikinstrument eingesetzt, und in Deutschland wurde eine Variante des Monochords, das sogenannte *Trummscheit* bis ins beginnende XVI Jh. eingesetzt.



Das Monochord

Die Abart de Monochords, die uns hier beschäftigt ist das wissenschaftliche Modell, das auf die Messung der Saitenabschnitte und der Spannkraft ausgerichtet ist. Heutzutage wird es nur noch als didaktisches Gerät eingesetzt. Trotz seines Namens weist es nicht immer ausschliesslich eine Saite auf, da die Gegenwart einer zweiten Saite die Beurteilung der beiden Noten eines Intervalls erleichtert und es sogar erlaubt, die beiden Noten zusammen erklingen zu lassen. Da die Saitenlänge nicht der einzige Parameter ist, der die Tonhöhe bestimmt, erlaubt es das wissenschaftliche Monochord, mit einem Gewichtssatz die Spannung der Saiten zu messen und zu verändern. Ein solches Monochord, manchmal in diesem Zusammenhang auch *Tonmesser* genannt, wird durch die Figur dargestellt.

Zu Pythagoras' Zeiten war der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge und der Tonhöhe noch unbekannt, und die Philosophen jener Zeit stellten sich vor, die Höhe des Tones wachse mit dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit! Das konnte nicht verhindern, dass Pythagoras dank dem Monochord numerische Verhältnisse zwischen

den verschiedenen Tönen und Intervallen ermittelte. Die erste Beobachtung zeigte, dass eine Oktave derjenige Ton war, der durch eine Saite halber Länge erzeugt wurde (bei gleichbleibender Spannung der Saite). Die Quinte entstand dadurch, dass man zwei Drittel der Saite schwingen liess. Nach reichlichem Experimentieren mit dem Monochord wurde offensichtlich, dass die konsonanten (wohlklingenden) Intervalle durch die Teilung der Saite, die dem Grundton entsprach, in einfache arithmetische Verhältnisse entstanden. Betrachten wir die Quotienten der Saitenlängen, so finden wir für die wichtigsten Intervalle die folgenden Werte:

Verhältnis	Intervall
2 : 1	Oktave
5 : 3	Grosse Sexte
8 : 5	Kleine Sexte
3 : 2	Quinte
4 : 3	Quarte
5 : 4	Grosse Terz
6 : 5	Kleine Terz

Dank der FORMEL VON BROOK TAYLOR können wir heute mühelos die Frequenz einer idealen Saite berechnen, also einer Saite mit totaler Flexibilität und Homogenität. Die in der Praxis gebräuchlichen Saiten erfüllen diese Bedingungen nur bis zu einem gewissen Grad und ergeben daher auch leicht von den Idealwerten abweichende Resultate. Dies ist die Formel von Taylor, in der L die Gesamtlänge der Saite (in Metern, m), T ihre Spannungskraft (in Newton, N) und C die Masse der Saite pro Längeneinheit (kg/m) bedeutet. Die Einheit der Frequenz, f, ist das Hz (1/s).

$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \sqrt{\frac{T}{C}}$$

Der volkstümliche Brauch, die Kräfte in kg zu messen, widerspricht der Logik, da das kg eine Einheit für die Masse, nicht für das Gewicht darstellt. Das kp ist eine Einheit für die Kraft (also auch für das Gewicht oder die Gewichtskraft), die intuitiv vom kg abgeleitet wurde: 1 kp ist das Gewicht das eine Masse von 1 kg auf die Erdoberfläche ausübt. Dieselbe Masse würde auf der Mondoberfläche nur noch etwa 0'16 kp wiegen. Aber die Masse eines Objektes verändert sich durch eine Reise auf den Mond nicht: ein Hammer mit ei-

ner gewissen Masse hat bei gleichbleibender Geschwindigkeit auf dem Mond dieselbe Wirkung wie hier auf der Erde oder an jedem beliebigen anderen Ort, wie zum Beispiel im schwerelosigen Raum. Die Einheit für die Kraft, die wir in unserer Formel antreffen, das Newton (N), entspricht der nötigen Kraft, um eine Masse von 1 kg mit einer Beschleunigung von 1 m/s^2 zu versehen. Das N kann als $1 \text{ m}\cdot\text{kg/s}^2$ ausgedrückt werden. Ein kp entspricht ungefähr 9,8 N.

BEISPIEL: Berechne die Frequenz einer Klaviersaite aus Stahl mit einer Dichte von $7,85 \text{ kg/dm}^3$, mit einem Durchmesser von 0,9 mm, und einer Distanz zwischen den Stegen von 39 cm, die mit einer Kraft von 60 kp gespannt ist.

$$L = 39 \text{ cm} = 0,39 \text{ m}$$

$$T = 60 \text{ kp} = 60 \cdot 9,8 \text{ N} = 588 \text{ N} = 588 \text{ m kg/s}^2$$

$$C = \frac{(0,0009 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 7,85 \cdot 1000 \text{ kg}}{4 \cdot \text{m}^3} = \frac{0,00499 \text{ kg}}{\text{m}}$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot 0,39 \text{ m}} \cdot \sqrt{\frac{588 \text{ m kg m}}{\text{s}^2 \cdot 0,00499 \text{ kg}}}$$

$$= \underline{440,09 \text{ Hz}} \quad (\text{Note La})$$

Intervalle, die aus zwei Tönen bestehen, können grundsätzlich auf zwei Arten numerisch dargestellt werden. Durch den Quotient der Frequenzen der beiden Töne (CHARAKTERISTISCHER QUOTIENT eines Intervalls) oder durch Vergleich mit einem festgelegten Mikrointervall. Diese zweite System wird manchmal als LOGARITHMISCHES SYSTEM bezeichnet, da zur Berechnung der Anzahl Mikrointervalle, die in einem bestimmten Intervall vorkommen, Logarithmen gebraucht werden.

Es sei hier in Erinnerung gerufen, dass die Verkettung (Zusammenfügung) von Intervallen nicht mit der Addition der charakteristischen Quotienten, sondern mit deren Multiplikation einhergeht. Entsprechend erhalten wir die Hälfte eines gegebenen Intervalls nicht durch Halbierung des Quotienten; wir müssen vielmehr die Quadratwurzel aus ihm ziehen, da die Quadratwurzel diejenige Zahl ist, die wieder den ursprünglichen Quotienten herstellen wird, wenn wir sie mit sich selber multiplizieren.

Arbeiten wir jedoch mit einem logarithmischen System, ergibt sich für die Verkettung von zwei Intervallen die Summe ihrer logarithmischen Charakteristika. Ebenso entspricht der Halbierung eines Intervalls die Halbierung der (logarithmischen) Charakteristik.

BEISPIEL: a) Welches Intervall entspricht der Verkettung einer Quinte mit der Charakteristik $3/2$ und einer kleinen Sexte mit der Charakteristik $8/5$?

b) Welches Intervall entspricht der Teilung einer Oktave in 3 gleiche Teile?

a) $3/2 \cdot 8/5 = 24/10 = 12/5$; da $12/5 = 2 \cdot 6/5$ handelt es sich bei unserem Intervall um die um eine Oktave erweiterte kleine Terz (oder: die Verkettung einer kleinen Terz und einer Oktave).

b) $\sqrt[3]{2} = 1,25992\dots$ ¹² da die dritte Wurzel die vierte Potenz der zwölften Wurzel ist, die ihrerseits dem temperierten Halbton entspricht, handelt es sich bei unserem Intervall um die temperierte grosse Terz. Wir stellen ebenfalls fest, dass die grosse Terz $5/4$ nur wenig von diesem Wert abweicht. Aber es ist Vorsicht geboten: Um diesen Unterschied zu berechnen, dürfen wir die charakteristischen Quotienten nicht etwa subtrahieren; wir müssen sie vielmehr dividieren.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{2} = 1,25992\dots \\ 5/4 = 1,25 \\ \hline \text{Quotient} = 1,00793\dots \end{array}$$

Wie wir sogleich sehen werden, wird in den logarithmischen Systemen (welche die zu untersuchenden Intervalle mit einem fest vorgeschriebenen Vergleichsintervall vergleichen) die Multiplikation der charakteristischen Quotienten zur Addition und die Division zur Subtraktion der entsprechenden Anzahl Mikrointervalle.

Zuerst seien dem Leser die für das Verständnis der Systeme "*Savart*" und "*Cent*" notwendigen Eigenschaften des mathematischen Konzeptes des Logarithmus in Erinnerung gerufen.

Eine Potenz der Form b^e ist das Produkt aus e gleichen Faktoren b . Der gemeinsame Faktor b heisst in diesem Zusammenhange die BASIS, die Anzahl Faktoren e der EXPONENT der Potenz. So ist etwa die Potenz 3^7 das Produkt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; in diesem Beispiel ist 3 die Basis, 7 der Exponent der Potenz, die den Wert 2187 hat. Zwei Po-

¹² Die dritte Wurzel aus 2 ist diejenige Zahl, die hoch drei (dreimal mit sich selber multipliziert) 2 ergibt.

tenzen derselben Basis werden miteinander multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert. Der Begriff Potenz kann für reelle Exponenten verallgemeinert werden. In diesem Fall ist die Definition des Exponenten als Anzahl Faktoren nicht mehr einleuchtend, aber die Rechenregeln bleiben erhalten.

Betrachten wir alle Potenzen einer konstanten Basis, werden ihre Exponenten als LOGARITHMEN der Potenzwerte bezeichnet. In Logarithmenschreibweise wird die Gleichung $p = b^r$ folgendermassen ausgedrückt:

$$r = {}^b \log p$$

Man sagt, r sei der Logarithmus von p zur Base b . Die Basis eines solchen Logarithmensystems kann jeder von 1 verschiedene positive reelle Wert sein, aber für technische Zwecke ist die meistgebrauchte Basis die 10. Die Logarithmen zur Basis 10 werden auch als Zehnerlogarithmen, dezimale oder dekadische Logarithmen bezeichnet und mit dem Symbol \lg gekennzeichnet. So ist etwa der Zehnerlogarithmus von 100 gleich 2, da $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$. Die Logarithmen sind meist irrationale Zahlen.

Der Logarithmus eines Produkts ist immer die Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren:

$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$$

Der französische Arzt und Physiker Félix Savart scheint zum erstenmal in der Geschichte ein System eingeführt zu haben, mit dem beliebige Intervalle mit einem konstanten Mikrointervall verglichen werden können, das ihm zu Ehre noch heute als *Savart* bezeichnet wird. Definiert ist das *Savart* als die tausendste Wurzel aus 10 (ca. 1,0023052). Um die Anzahl der in einem gegebenen Intervall I enthaltenen *Savarts* zu berechnen, geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[1000]{10} \right)^x &= I && / \log \\ x \cdot \log \sqrt[1000]{10} &= \log I \\ x \cdot \frac{1}{1000} \cdot \log 10 &= \log I \\ x &= 1000 \cdot \frac{\log I}{\log 10} \end{aligned}$$

$$\text{Anzahl Savarts} = 1000 \cdot \frac{\log I}{\log 10}$$

Diese Herleitung ist von der Basis des Logarithmensystems unabhängig; trotzdem sei in Erinnerung gerufen, dass die Zehnerlogarithmen am häufigsten angewandt werden und wir uns künftig auf diese beziehen werden, wenn keine andere Basis angegeben wird.

Bei Anwendung von Zehnerlogarithmen reduziert sich unsere Formel auf:

$$x = 1000 \cdot \lg I$$

da ja $\lg 10 = 1$.

BEISPIEL: Wie vielen *Savarts* entspricht die grosse Terz $5/4$ und die grosse temperierte Terz? Berechne die Differenz in *Savarts*.

$$\begin{aligned} \text{Terz } 5/4: \quad x_1 &= 1000 \cdot \log(5/4) &&= 96,9100\dots \\ &x_2 = 1000 \cdot \log(1,2599\dots) &&= 100,34\dots \\ \text{Differenz} &= 3,4333\dots \end{aligned}$$

Im System von Savart wird die Oktave in 301,029... Mikrointervalle unterteilt.

Ab sofort werden wir ein anderes System anwenden, das wir dem Mathematiker und Übersetzer ins Englische des berühmten Buches von Helmholtz, "Die Lehre von den Tonempfindungen als Physiologische Grundlage für die Theorie der Musik", Alexander John Ellis verdanken, der die Oktave in 1200 *Cents* unterteilte. Ein *Cent* entspricht also genau dem Hundertstel eines temperierten Tons. Der charakteristische Quotient eines *Cents* entspricht der tausendzweihundertsten Wurzel aus 2. In Analogie zum *Savart* finden wir die folgende Formel zur Berechnung der Anzahl in einem gegebenen Intervall I enthaltenen *Cents*:

$$x = 1200 \cdot \frac{\log I}{\log 2}$$

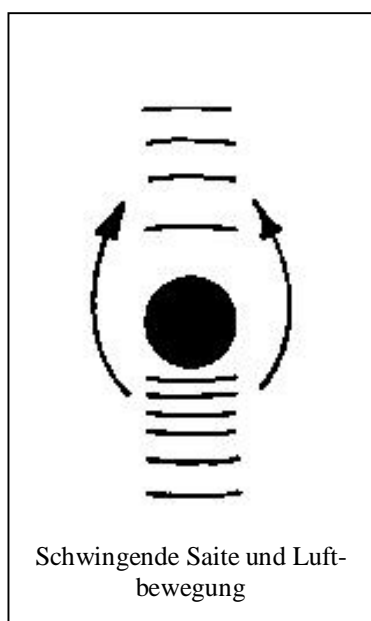
Bei der Anwendung von Logarithmen zur Basis 2 würde die Formel vereinfacht. Aber dieses Logarithmensystem ist nicht üblich.

BEISPIEL: Wie viel *Cents* entspricht die natürliche Quinte? Und die temperierte?

Natürliche Quinte $3/2$: $x_1 = 1200 \cdot (\log(3/2) / \log 2) = 701,955\dots$

Temperierte Quinte 1,49830...: $x_2 = 1200 \cdot (\log 1,4983 / \log 2) = 700$

Wir haben die von einer Saite produzierten Töne erwähnt, ohne näher auf deren physikalische Erzeugung einzugehen. Um die vibratorischen Erscheinungen einer gespannten Saite besser zu verstehen, können wir ein Gummiband zwischen zwei festen Punkten aufspannen, es in der Mitte packen, nach der Seite hin ziehen und schnellen lassen. Wir bemerken sofort, dass alle Punkte des Gummibandes,



mit Ausnahme der Befestigungspunkte, eine Schwingung gleicher Frequenz beschreiben, und wenn unser Modell gut gelungen ist, schwingen alle Punkte in der gleichen Ebene. Bei dieser Art von Querschwingungen finden wir in der Mitte die grösste Amplitude, die gegen die Fixpunkte hin allmählich bis auf 0 abnimmt, so dass das vibrierende Gummiband unseres Modells den Aspekt eines Spindels annimmt. Dies ist der einfachste Schwingungsmodus der Saite.

Führen wir künstlich einen neuen Fixpunkt ein, indem wir die Saite genau in der Mitte zwischen den beiden Befestigungspunkten festhalten, so formen sich beim Zupfen plötzlich zwei Spindel und

der von der Saite angegebene Ton hat die doppelte Frequenz, die der Oktave des Grundtones entspricht. Analog können wir die Saite auch in 3, 4 oder mehr gleichlange Abschnitte teilen. Die Fixpunkte werden in diesem Zusammenhang als **KNOTEN**, die Punkte grösster Amplitude als **BÄUCHE** bezeichnet.

Sei f die Grundfrequenz der Saite und n die Anzahl Abschnitte derselben. Bei $n=1$ haben wir die Grundschwingung der Saite.

Die Anzahl Knoten (die Befestigungspunkte mitgezählt) ergibt sich als $n+1$. Die Frequenz des erzeugten Tones ist $n \cdot f$.

Wollen wir ohne Einführung künstlicher Fixpunkte eine Saite so erregen, dass sie 2 Bäuche erzeugt ($n=2$) so müssen wir sie am vierten Teil Ihrer Gesamtlänge anzupfen. Wir hören einen Ton der doppelten Frequenz der Grundfrequenz.

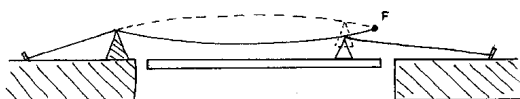
Eine einzelne Saite kann also Töne mit den Frequenzen f , $2 \cdot f$, $3 \cdot f$, ... erzeugen. Normalerweise hören wir alle diese Frequenzen aufs Mal, mit verschiedenen Intensitäten, so dass wir einen ZUSAMMENGESETZTEN TON hören. Der Grundton bestimmt die Periode und daher die Grund-Frequenz dieser Überlagerung von Schwingungen. Das ungeübte Gehör erkennt meist nur die Grundfrequenz eines solchen zusammengesetzten Tones. Wir nennen hier die verschiedenen Komponenten eines zusammengesetzten Tons PARTIALTÖNE. Sind die Frequenzen der Partialtöne ganzzahlige Vielfache des Grundtones (wie es bei schwingenden Saiten immer der Fall ist) spricht man von HARMONISCHEN PARTIALTÖNEN. Der ERSTE PARTIALTON ist der GRUNDTON. Die anderen Partialtöne werden auch OBERTÖNE benannt. Ein REINER TON enthält ausschliesslich den Grundton und entspricht einer einzigen Sinusschwingung. Jeder einzelne Partialton ist für sich genommen ein reiner Ton.

Es sei hier in Erinnerung gerufen, dass die Definition der Begriffe Partialton, Oberton, harmonischer Partialton, usw. leider keiner Norm unterstellt sind, und daher von einem Autor zum anderen abweichen können.

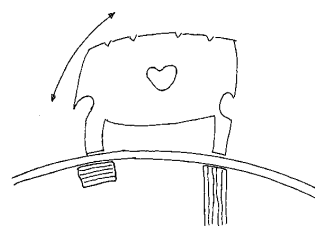
Wie gehen die von einer Saite erzeugten Vibrationen (Schwingungen) auf die Luft über? Diese Frage ist nicht ganz so trivial, wie es zuerst scheint. Stellen wir uns einen Querschnitt durch eine schwingende Saite vor, so sehen wir eine Kreisscheibe, die harmonisch im umgebenden Luftraum hin- und herschwingt. Nehmen wir an, unsere Scheibe befindet sich in einer der extremen Positionen. Die Luft ist auf der gegenüber der Gleichgewichtsposition liegenden Zone komprimiert worden und man könnte meinen, diese Kompression sollte sich in Form einer Welle konzentrisch fortbewegen. Hier tritt aber eine andere Erscheinung auf: Die komprimierte Luft fliesst in die Zone mit Unterdruck auf der anderen Seite der Saite ab und die Überlagerung dieses Effekts mit der entstehenden Welle hat eine äusserst schwache Welle zur Folge. Wie ist dann der brillante Klang eines Klaviers oder einer Violine zu erklären? Die Saite bringt den Steg (oder beide Stege) des Instruments zum Schwingen,¹³ der die Schwingungen dem RESONANZBODEN (auch Klangboden genannt) mitteilt, also demjenigen Teil des Instruments, der seine Schwingungen schliesslich an die umgebende Luft abgibt. Dank der grossen Ausdehnung des Resonanzbodens können hier die abgestrahlten Wellen nicht mehr durch die Kompensierung des Luftdruckes abgeschwächt werden, wie dies bei einer Saite alleine der Fall war.

¹³ Also ist der Steg nicht ganz so unbeweglich, wie es scheinen möchte.

Es ist wichtig, dass der Resonanzboden innerhalb des Tonumfangs des entsprechenden Instruments keine allzu ausgeprägte Eigenfrequenz aufweist, da sonst einzelne Noten vor anderen überverteilt würden. Die Schwingungen des Resonanzbodens sind also nicht frei, wie im Fall einer Resonanz im strengeren Sinne, sondern erzwungen. Ein guter Resonanzboden soll einen grossen Anteil der eintreffenden Schwingungen zu Schallwellen umwandeln.



Der virtuelle Fixpunkt



Steg einer Geige

Bei der Übertragung der Schwingungen der Saite auf den Resonanzboden gingen wir davon aus, dass der Steg parallel zu den seitlichen Schwingungen der Saite mitschwingt. Das bedeutet, dass der Kontaktpunkt des Steges und der Saite strenggenommen keinen Fixpunkt F darstellt; vielmehr befindet sich der Punkt F in virtueller Form in der Verlängerung der Saite, leicht hinter dem Steg. Die Figur stellt diese Tatsache im Falle der Übertragung der Schwingungen einer Violsaite auf den Resonanzboden über den Steg graphisch dar.

Aber der Steg hat auch die Tendenz, in Richtung der Saite zu schwingen, wie wir es anhand eines Modells sofort ersehen können: Wir binden dazu ein Gummiseil zwischen zwei feste Punkt, etwa an zwei Haken an gegenüberliegenden Wänden. Dann stellen wir einen Steg in der Nähe einer der beiden Wände auf, der sich wie ein Scharnier bewegen kann und das Seil berührt. Bewegen wir nun die Mitte des Seils hinauf und hinunter, beobachten wir, dass das Scharnier mit der doppelten Frequenz waagrecht hin- und herschwingt.

Diese Erscheinung steuert auch dazu bei, bei Streichinstrumenten, wie etwa bei der Violine, die Oktave zu verstärken.

Stellen wir uns etwa ein Instrument vor, bei dem die Saiten senkrecht auf dem Resonanzboden stünden: bei diesem Instrument wären die vom Resonanzboden abgestrahlten Töne genau eine Oktave höher, als die von der Saite erzeugten.

Wir sehen also, dass die Stege der Saiteninstrumente nie ganz starr sind, da gerade ihre Fähigkeit zu vibrieren erlaubt, die Schwingungen der Saite dem Resonanzboden zuzuführen, der sie schliesslich als Schallwellen abstrahlt.

Im modernen Klavier werden die 13 tiefsten Töne durch je eine Saite erzeugt. Die nächsten 16 Töne werden durch je zwei auf die gleiche Frequenz gestimmten Saiten (Saitenchöre) erzeugt. Die restlichen Töne entsprechen Dreiergruppen von Saiten. Dieses Schema kann von einem Klavier zum anderen leicht variieren.

Die Stimmung auf den gleichen Ton wird durch die Tatsache, dass die beiden Saiten zusammen mit dem Steg ein gekoppeltes System bilden erleichtert. Stimmen wir also die beiden Saiten einer gleichen Note mit einer extrem kleinen Differenz (die einen gewissen Maximalwert nicht überschreiten darf), werden die beiden Saiten bei gleichzeitigem Anschlagen einen Ton der selben Frequenz erzeugen. Es ist wie wenn sich die beiden Saiten einigen würden.

Bis hierher haben wir ausschliesslich die Querschwingungen (Transversalschwingungen) der Saite betrachtet. Aber die Saiten schwingen noch auf zwei andere Arten, die man bei der Besprechung der Klangfarbe eines Instruments nicht ganz vernachlässigen darf: die torsionalen Schwingungen oder DREHSCHWINGUNGEN und die Längsschwingungen oder Longitudinalschwingungen. Wir können von den beiden Schwingungsarten je ein Gedankenmodell entwickeln: Um die Drehschwingungen zu veranschaulichen, stellen wir uns ein an zwei senkrecht übereinanderliegenden Punkten aufgespanntes Gummiband vor, an dem in regelmässigen Abständen Querstäbe angebracht sind. Versetzen wir einen der Stäbe in rotierende Bewegung, so erhalten wir bald einmal das Bild einer Drehschwingung des ganzen Gummibandes. Zur Illustration der Längsschwingungen ist eine senkrecht aufgehängte Spiralfeder nützlich: Verpassen wir dieser an einem Punkt einen senkrechten Stoss, so können wir beobachten, wie eine Welle die ganze Feder durchläuft.

Die Frequenz der Quer-, Dreh- und Längsschwingungen sind im Allgemeinen voneinander verschieden.

Zuhause habe ich ein rohrförmiges Treppengeländer, das sich sehr gut zur Erzeugung von Quer- und Längswellen eignet. Schlage ich mit der Faust auf das Geländer, ertönt ein Do. Streiche ich jedoch mit der feuchten Hand in Längsrichtung darüber, wird ein Fa # hörbar. Die Frequenz der Längsschwingung hängt nicht von der Spannung der Saite oder der Röhre ab, wohl aber vom verwandten Material. Dies erklärt, warum Leute mit entsprechend geübtem Gehör hören können, ob die Mi-Saite einer Geige aus Draht oder aus Darm besteht.

Die Art der Anregung entscheidet grundsätzlich über die verschiedenen gleichzeitig stattfindenden Schwingungsarten und über die Intensitäten der verschiedenen im produzierten Ton enthaltenen Partialtöne. Grundsätzlich muss zwischen den von Streichinstru-

menten (Violine, usw.), Zupfinstrumenten (Cembalo, Gitarre) und Schlaginstrumenten (Klavier¹⁴) erzeugten Tönen unterschieden werden.

Die Instrumente der ersten Gruppe weisen die grösste Auswahl an Schwingungsarten auf und bieten dem Künstler die grösste Freiheit zur Entfaltung seiner Interpretation. Beim Streichen mit dem Bogen wird die Saite zu Quer- aber auch zu Drehschwingungen angeregt. Der Berührungsort des Bogens begünstigt die Bildung der einen oder der anderen Partialtöne. In gewissen Violinpartituren können wir Hinweise wie "*sul ponticello*" oder "*sulla tastiera*" finden. Der erste Ausdruck erfordert, dass der Bogen möglichst nahe am Steg angelegt werden soll. Diese Stellung begünstigt hohe Partialtöne und das Resultat ist ein sehr schriller Ton. Wird jedoch der Bogen "*sulla tastiera*" angelegt, also auf dem Griffbrett, dem Holz, auf dem die Finger der linken Hand die Saiten niederdrücken, um deren wirksame Länge einzuschränken und damit die Tonhöhe zu bestimmen, in diesem Fall wird ein sehr sanfter Ton mit nur wenigen höheren Partialtönen erzeugt.

Bei den Zupf- und Schlaginstrumenten erfolgt die Anregung der Saite in einem kurzen Augenblick, dann wird die Saite sich selbst überlassen. Die Intensität wird daher im ersten Moment maximal sein, dann allmählich abfallen, und die Schwingungsweise wird sich nicht mehr durch den anregenden Hammer beeinflussen lassen. Sowohl bei der durch den Hammer angeschlagenen wie bei der gezupften Saite wird das Spektrum der Partialtöne vor allem durch den Anregungspunkt bestimmt, sowie auch durch die Form und das Material des anregenden Gegenstandes.

Wir haben am Anfang erwähnt, dass der zweite Partialton durch Anregung im vierten Teil der Saite gefördert wird, da dadurch hier ein Bauch dieser Partialtons entsteht. Wird die Saite jedoch genau in der Mitte erregt, so erhalten wir einen Ton der keine geraden Partialtöne enthält, da alle Frequenzen, die ein gerades Vielfaches des Grundtones sind im Zentrum der Saite einen Knoten aufweisen, der durch die Erregung in diesem Punkt zerstört wurde.

Wir finden ein analoges Resultat, wenn wir auf den Drittel der Saitenlänge schlagen: alle Partialtöne, deren Indices durch 3 teilbar sind, werden getilgt. Dasselbe ist für alle folgenden natürlichen Zahlen der Fall.

Wie wir später im Kapitel über die musikalischen Tonleitern sehen werden, fallen die ersten sechs harmonischen Partialtöne genau mit Tönen von Zarlino zusammen, so dass sie sich auf befriedigende

¹⁴ In diesem Zusammenhang muss das Klavier als Schlaginstrument eingestuft werden.

Weise durch gleichmässig temperierte Töne annähern lassen. Der siebte harmonische Partialton jedoch ist der erste des Spektrums, der durch keine der Töne unserer gleichmässig temperierten Tonleiter angenähert werden kann. Lasset uns die ersten 7 harmonischen Partialtöne der zentralen Note Do (3) eines Klaviers betrachten:

Partialton Nummer	1	2	3	4	5	6	7
Note	Do (3)	Do (4)	Sol (4)	Do (5)	Mi (5)	Sol (5)	La – Si \flat

In diesem Fall kommt der siebte Partialton zwischen La und Si \flat zu liegen. Um diese Dissonanz aus dem Weg zu räumen, schlug der grosse Physiker Helmholtz vor, den Hammer des Klaviers genau auf den ersten Siebentel der Saite aufprallen zu lassen. Dadurch würden die harmonischen Partialtöne mit den Nummern 7, 14, 21,... aus dem Klavierton ausgeschaltet. Trotzdem hat die Erfahrung—die im Instrumentenbau meist fruchtbarer war, als die exakten Wissenschaften—gezeigt, dass der siebte Partialton die Schönheit des Klavierklanges begünstigt.

Ein anderer Parameter, der entscheidend die Qualität des Klaviertons beeinflusst ist die Beschaffenheit des Hammers. Harte und zugespitzte Hämmer fördern die höheren Partialtöne, weiche und runde Hämmer betonen mehr die niedrigen Partialtöne. Für gewisse Zwecke wurden die Hämmer eines Klaviers mit Metallspitzen versehen, um einen besonders klirrenden Ton zu erzeugen. Die guten Klavierstimmer verstehen es, die Konsistenz des Filzes, der die Hammerspitze bedeckt, so abzuändern, dass sie die gewünschte Klangfarbe erreichen: man spricht von Intonation, die meist durch Stechen mit geeigneten Nadeln vorgenommen wird.

Wenn wir einen Flügel zur Hand haben, können wir eine ganze Reihe akustischer Experimente durchführen, bei denen die Schwingungen mit einer Serie von gefalzten Papierstreifen, die über einzelne Saiten gehängt werden, nachgewiesen werden können. Aber Vorsicht: der Stahl, aus dem die Saiten bestehen rostet gerne! Kleine unsichtbare Kratzer auf der Oberfläche der Stahlsaiten neigen dazu, später zum Bruch zu führen!

Wenn wir etwa die Taste Do (3) niederdrücken und gleichzeitig das rechte Pedal (das bewirkt, dass sämtliche Dämpfer von den Saiten abgehoben werden) betätigen, können wir feststellen, dass die Saiten, die den Obertönen (also den vom Grundton verschiedenen Partialtönen) der Note Do (3) entsprechen (nämlich Do (4), Sol (4), Do (5), usw.) durch Resonanz mitschwingen. Aber wir können auch feststellen, dass sogar tiefere Noten wie etwa Do (2) und Fa (1) mit-

schwingen, unter anderem, weil eine der Eigenresonanz-Frequenzen derselben Do (3) ist, da diese Note je einen Oberton der beiden Noten Do (2) und Fa (1) bildet.

Vielleicht werden wir über die Tatsache staunen, dass die Note Do (1) auch die Saiten der Note Sol (1) zum Mitschwingen anregt, obwohl Do (1) kein Oberton von Sol (1) ist. Aber die beiden Noten haben gemeinsame Partialtöne, etwa die Note Sol (2), unter anderen, welche die Saiten von Sol (1) zur Resonanz bewegt.

Lasset uns ohne Pedal die Taste von Sol (1) vorsichtig runterdrücken, ohne dass der Hammer mit den Saiten in Berührung kommt. Während wir die Taste gedrückt halten, schlagen wir kurz die Note Do (1) an: Es erklingt die Note Sol (2) und erlischt, sobald wir die Taste von Sol (1) loslassen.

In einem Klavier in optimalem Zustand sollten die Saiten keinerlei Drehschwingungen aufweisen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass beim Einbau einer verdrehten Saite, die Querschwingungen und die Drehschwingungen unangenehme Interferenzerscheinungen hervorrufen können, die sich in einer leicht unbestimmten Tonhöhe äussern, die sich nie mit der nötigen Genauigkeit stimmen lässt.

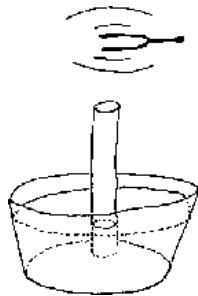
Wie wir es später im Kapitel über die Klangfarbe sehen werden, spielt die Anwesenheit der harmonischen Partialtöne eine hervorragende Rolle in der Unterscheidung von Tönen gleicher Frequenz, die von verschiedenen Instrumenten erzeugt werden. Leute mit geübtem Gehör können die einzelnen Partialtöne aus einem Ton heraushören. Eine Person mit ungeübtem Gehör, kann folgende Übungen durchführen, um zu lernen, die Obertöne eines Klaviertons zu hören:

Zuerst schlagen wir die Taste Sol (4) leise an. Anschliessend drücken wir energisch auf die Taste Do (3); nun hören wir Sol (4) als Partialton von Do (3) (Sol (4) ist der dritte Partialton von Do (3)).

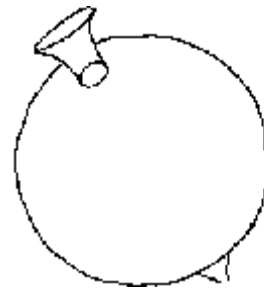
- Lasset uns einen Akkord spielen, der die Note Sol (4) nicht enthält, wohl aber lauter Noten, die Sol (4) als Partialtöne enthalten: Do (2), Mi \flat (2), Sol (2), Do (3), Sol (3). (Sol (4) ist der harmonische Partialton Nummer 6 von Do (2), Nummer 5 von Mi \flat (2), Nummer 4 von Sol (2), usw.). Der gemeinsame Partialton Sol (4) tritt deutlich hervor, ist aber einer Art von Schwebungen unterworfen, die im nächsten Kapitel erklärt werden.

Obwohl es immer Leute mit ausserordentlichem Gehör gegeben hat, wie etwa Rameau, von dem gesagt wurde, er sei sogar imstande, die Partialtöne der menschlichen Stimme herauszuhören, gaben sich die Physiker mit dem subjektiven Zeugnis eines menschlichen Organs nicht zufrieden, sondern suchten vielmehr nach einem System, das es erlaubte, die Partialtöne als eine messbare physikalische Tat-

sache darzustellen, indem sie sie voneinander zu trennen suchten. Dieser Wunsch wurde durch die RESONATOREN VON HELMHOLTZ voll erfüllt. Der Resonanzeffekt, wie im vorangehenden Kapitel beschrieben, beschränkt sich nicht auf feste Körper, wie Federn, Brücken oder Violinsaiten; vielmehr können auch in geeigneten Gefäßen untergebrachte Flüssigkeiten und Gase der Resonanz unterworfen sein. Ein einfaches Experiment, das alle durchführen können, soll uns das beweisen:



Resonanz der Luft in einem Rohr



Resonator von Helmholtz

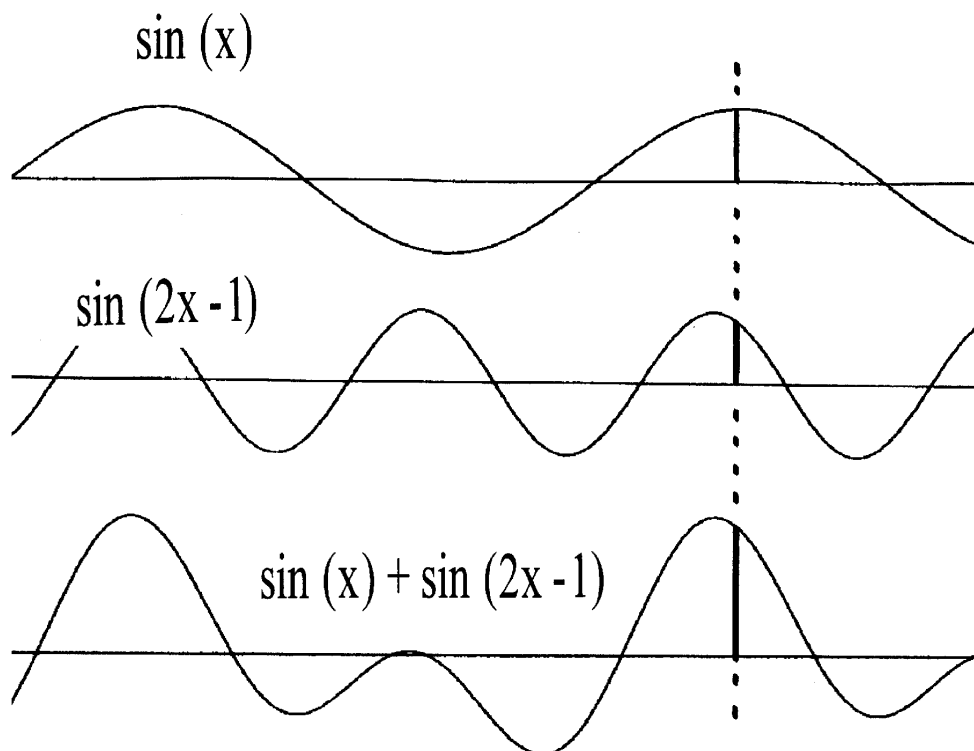
- Ein Stück Rohr aus Kunststoff oder Glas wird senkrecht in ein Becken voll Wasser getaucht, so dass ein zylindrisches Stück hervorschaut. Über die Öffnung des Rohres halten wir eine schwingende Stimmgabel und variieren sodann die Höhe des Rohres, bis wir eine Stellung finden, bei welcher der Ton der Stimmgabel verstärkt wird. Jetzt befindet sich die Luft in der Röhre in Resonanz mit der Frequenz der Stimmgabel.

Die Resonatoren von Helmholtz sind kugelförmige Glasgefäße mit zwei gegenüberliegenden Öffnungen: eine, um sie ans Ohr zu halten, die andere, um den zu untersuchenden Schall einzufangen. Ein solcher Resonator verhält sich wie eine Art akustisches Filter, da er nur den Schall einer gewissen Frequenz verstärkt (genauer: den Schall der in einem bestimmten kleinen Intervall liegenden Frequenzen). Um die Komponenten beliebiger Töne zu untersuchen, besaß Helmholtz ganze Sätze von Resonatoren, die alle auf bestimmte Frequenzen abgestimmt waren.

Später wurden die Resonatoren von Helmholtz weitgehend durch elektronische Systeme verdrängt, so dass sie heute praktisch nur noch für didaktische Zwecke eingesetzt werden. Aber wir müssen uns bewusst sein, dass sie zu Helmholtz Zeiten ein unersetzliches Hilfsmittel darstellten, das zu einem wichtigen Fortschritt in der akustischen Forschung führte.

TONÜBERLAGERUNG

Die Musik gibt sich nur selten mit einer Folge einzelner Töne zufrieden. In diesem Kapitel wollen wir kurz die physikalischen Erscheinungen besprechen, die mit der Überlagerung von zwei reinen Tönen einhergehen, also Tönen, die keine Obertöne haben und sich durch eine Sinuskurve darstellen lassen. Solche Töne werden durch drei Eigenschaften charakterisiert: Ihre Frequenz (welche die Tonhöhe bestimmt), ihre Amplitude¹⁵ und ihre momentane Phase.



Überlagerung von zwei Kurven

Wie wir es im Kapitel über das menschliche Gehör sehen werden, kann unser Gehör die letzte Grösse nicht unterscheiden; trotzdem

¹⁵ Die Frequenz und die Amplitude bestimmen die Lautstärke: diese ist proportional zum Quadrat der Amplitude und zum Quadrat der Frequenz.

werden wir sehen, dass diese bei der elektrischen oder elektronischen Übermittlung des Schalls eine grundsätzliche Rolle spielt.

Graphisch entspricht der Überlagerung von Sinustönen, wie auch der Überlagerung von zwei oder mehr beliebigen Tönen, die punktweise Summe der Koordinaten der Einzeltöne, wenn diese als Funktionskurven (Elongation als Funktion der Zeit, auch PHONOGRAPHISCHE KURVE genannt) dargestellt werden.

Lasset uns hier unter den unendlich vielen Möglichkeiten ein paar charakteristische Beispiele herauswählen.

- Wenn wir zwei identische Töne auswählen (gleiche Amplitude, Frequenz und Phase) erhalten wir einen Ton mit gleicher Frequenz und Phase, dessen Amplitude der Summe der Amplituden der beiden Töne entspricht, also der doppelten Amplitude des Einzeltons.

$$y = A \cdot \sin x + A \cdot \sin x = 2 \cdot A \cdot \sin x$$

Allgemeiner: Wenn wir zwei Töne addieren, die sich nur in ihrer Amplitude unterscheiden, erhalten wir einen Ton derselben Frequenz und Phase, dessen Amplitude die Summe der Amplituden der beiden Töne ausmacht.

$$y = A \cdot \sin x + B \cdot \sin x = (A + B) \cdot \sin x$$

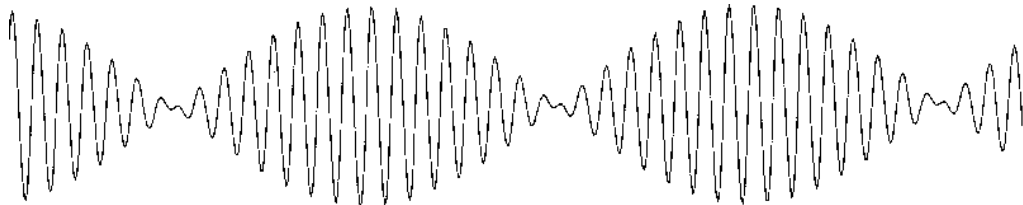
- Addieren wir zwei Töne, die sich nur in ihrer Phasendifferenz von π (oder 180°) unterscheiden, ist das Resultat die Absenz von Schall, also absolute Ruhe, da sich die beiden Kurven gegenseitig kompensieren. Wir sehen hier, dass die Überlagerung von Tönen nicht immer eine Zunahme der Lautstärke bewirkt.

- Überlagern wir zwei Töne so, dass die Frequenz des ersten ein natürliches Vielfaches des zweiten ist, erhalten wir einen zusammengesetzten Ton mit einem Oberton.

- Überlagern wir zwei Töne so, dass die beiden Frequenzen einen gemeinsamen Teiler d haben, gehören also die beiden Töne zu den möglichen Obertönen des Tones mit Frequenz d , fasst das Gehör diese Überlagerung wie einen musikalischen Akkord auf, der konsonant oder dissonant sein kann, wie wir später sehen werden.

- Einen besonders interessanten Fall bildet die Überlagerung zweier Töne, die ungefähr die gleiche Amplitude, aber leicht voneinander abweichende Frequenzen haben. Nehmen wir an, die beiden Töne fangen gemeinsam zu klingen an, wird in diesem ersten Zyklus die Summe der Amplituden ungefähr der doppelten Amplitude entsprechen; nach einem weiteren Zyklus werden wir eine Phasendifferenz vorfinden, die der Periodendifferenz der beiden Kurven entspricht; nach ein paar weiteren Zyklen wird die Phasendifferenz ungefähr π entsprechen, so dass sich die beiden Kurven gegenseitig

aufheben; dann fängt die Summe wieder zu wachsen an. Dieses Spiel wiederholt sich mit einer gewissen Periodizität, deren Frequenz die Differenz der Frequenzen der beiden überlagerten Töne ist. Diese periodische Schwankungen der Tonintensität werden als SCHWEBUNGEN bezeichnet. Die Frequenz des hörbaren Tones entspricht dem arithmetischen Mittel der beiden überlagerten Töne.



Schwebungen

BEISPIEL: Schlagen wir gleichzeitig zwei Stimmgabeln an, mit den Frequenzen 400 Hz (das internationale A) und 435 Hz, wird der Ton 5 Mal pro Sekunde zu- und abnehmen. Wir haben es mit Schwebungen von 5 Hz zu tun.

Wie wir später sehen werden, sind die Schwebungen beim Stimmen der meisten Musikinstrumente unentbehrlich.

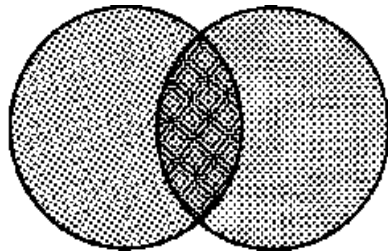
Eine andere Anwendung finden wir in der akustischen Warnung vor Grubengasen, in gewissen Minen. Dieses System beruht auf der gleichzeitigen Betätigung von zwei auf die gleiche Tonhöhe gestimmten Pfeifen, wobei eine mit Aussenluft, die andere mit Grubenluft versorgt wird. Da die Zusammensetzung der Luft die Tonhöhe beeinflusst, verändert sich bei Verunreinigung der Luft die Frequenz der mit Grubenluft gespeisten Pfeife, so dass plötzlich laut vernehmbare Schwebungen auftreten.

Wächst die Differenz zwischen den beiden Tönen, wächst auch die Frequenz der Schwebungen. Von etwa 30 oder 40 Hz an, beginnt das Gehör einen neuen Ton mit eben dieser Frequenz zu vernehmen, einen Differenzton. Spielen wir etwa gleichzeitig einen Ton von 440 Hz und einen von 550 Hz (die grosse Terz des ersten) auf einer Violine, können Leute mit geübtem Gehör einen Ton von 110 Hz vernehmen.

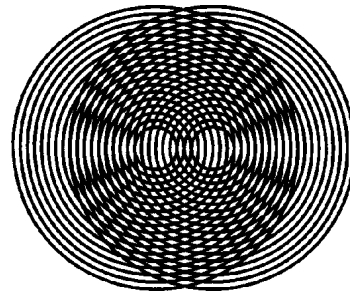
Die Differenztöne stellen die wichtigste Erscheinung im Bereich der sogenannten Kombinationstöne dar, die nicht immer reellen Tönen entsprechen, sondern vielfach subjektive Erscheinungen unseres Gehörs sind. Schon Tartini entdeckte die Differenztöne um 1754, so dass manchmal auch von Tartini-Tönen gesprochen wird.

Im Jahre 1856 entdeckte Helmholtz eine andere Art von Kombinationstönen, die SUMMENTÖNE, die wesentlich schwieriger zu vernehmen sind.

So wie die Schwingungen, überlagern sich auch die Wellen. Diese Fälle sind vom mathematischen Standpunkt her wesentlich komplizierter, da hier nicht eine einzelne Partikel schwingt, sondern eine Unendlichkeit. Trotzdem werden wir anschliessend ein paar Spezialfälle besprechen. Es sei vorangestellt, dass sich unter normalen Bedingungen zwei akustische Wellen, die einander kreuzen, nicht gegenseitig beeinflussen, obwohl sie sich im gleichen Medium fortpflanzen.



Interferenz zweier Raster



Interferenz von Kreisen

Das Resultat der Überlagerung von zwei oder mehreren Wellen heisst INTERFERENZ. Die Wellen können eindimensional sein, wie etwa bei akustischen Wellen, die sich in einem Rohr fortbewegen; oder zweidimensional, wie die Wellen auf der Wasseroberfläche; oder schliesslich dreidimensional, wie die meisten akustischen Wellen.

In jedem Fall kann jeder einzelne Punkt als Überlagerungsort von zwei oder mehr Schwingungen angesehen werden. Um eine Idee der Erscheinungen zu geben, die im Zusammenhang mit der Überlagerung zweidimensionaler Wellen auftreten können, stellen die beiden Abbildungen Überlagerungen von zwei regelmässigen Strukturen dar: im ersten Fall wurden zwei Raster aus konzentrischen Kreisen dargestellt, und das Resultat gleicht der Struktur, die entsteht, wenn wir zwei Steine gleichzeitig in einen See werfen, mit einem kleinen Abstand zwischen ihnen. Die zweite Abbildung zeigt den typischen Moiréeffekt, den wir von den graphischen Künsten her kennen, und

der unter anderem entstehen kann, wenn mit einem Autotypieraster ein bereits gerastertes Bild reproduziert wird¹⁶.

Die beiden Abbildungen zeigen natürlich nicht die Vorgänge, die bei der Überlagerung von zwei bidimensionalen Wellen wirklich stattfinden, sie gibt uns nur eine statische Idee davon. Mit etwas Einbildungskraft können wir uns die dreidimensionalen Analogien dieser Abbildungen vorstellen, die den meisten akustischen Fällen entsprechen.

Die Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz erzeugt die sogenannten STEHENDEN (auch stationären) WELLEN. Stehende Wellen können durch Überlagerung von ein-, zwei- oder dreidimensionalen Wellen entstehen.

Als erstes Beispiel sei die Überlagerung von zwei eindimensionalen Wellen in der sogenannten KUNDTSCHEN RÖHRE¹⁷ erwähnt. Diese in ihrem Aufbau mit einer Fahrradpumpe vergleichbare Röhre besteht aus einem Glasrohr mit einem festverschlossenen Boden und einem beweglichen Ende in Form eines Kolbens auf der anderen Seite. Vibriert dieser so (in Pfeilrichtung), dass die Periode der Schwingung mit der Zeitspanne zusammenfällt, die eine Schallwelle braucht, um die Strecke vom Kolben zum Boden zurückzulegen, sich daran zu spiegeln und in die Ausgangsstellung zurückzukehren, befindet sich die Luft in der Röhre in Resonanz mit der Frequenz des Kolbens. Diese Situation kann durch Anpassung der Schwingfrequenz des Kolbens oder durch Veränderung der wirksamen Rohrlänge (zwischen Kolben und Boden) erreicht werden. Verdoppeln wir die Frequenz des Kolbens, stossen wir wieder auf Resonanz. In diesem Fall stösst jede vom Kolben erzeugte Welle mit der am Rohrboden zurückgeworfenen vorangehenden Welle zusammen (beide haben dieselbe Frequenz) und das Resultat ist eine stehende Welle, die sich durch die Anwesenheit von Zonen fast absoluter Ruhe (die in Analogie an die schwingende Saite als KNOTEN bezeichnet werden) und Zonen maximaler Bewegung (BÄUCHEN) auszeichnet.

Im einfachsten Fall finden wir zwei Knoten vor, einen beim Boden und einen beim Kolben. Schwingt unser Kolben mit doppelter Frequenz verglichen mit der Ausgangslage, finden wir 3 Knoten; wird die Frequenz der Ausgangslage mit einer beliebigen natürlichen Zahl n multipliziert, werden $n+1$ Knoten erzeugt.

Der aufmerksame Leser wird einen Widerspruch in der Tatsache finden, dass gerade der Kolben, der seine Schwingungen der Luft im

¹⁶ Leider sehen wir uns auch hier nicht ganz frei von diesem Effekt, da die gleichmässigen Strukturen, aus denen diese Bilder bestehen die Tendenz haben, mit den Rastern des informatischen Systems zu interferieren.

¹⁷ Nach ihrem Erfinder, August Kundt (1839-94), benannt.

Inneren des Rohres überträgt, einen Knoten darstellt, da er schliesslich nicht gleichzeitig ruhig sein und Schwingungen übertragen kann. Dieses Paradoxon kann analog erklärt werden, wie im Falle des schwingenden Steges, der zugleich als Knoten und als Überträger von Schwingungen wirkt: in jenem Fall sahen wir, dass der Fixpunkt virtuell war und etwas hinter dem Steg lag. Auch hier ist der Fixpunkt virtuell und liegt etwas jenseits des Kolbens.

Ein Vorteil der Kundtschen Röhre liegt in der Möglichkeit, die Lage der Knoten experimentell darzustellen. Zu diesem Zweck wird eine kleine Menge feiner, leichter Staub (Mehl oder Korkmehl zum Beispiel) ins Innere des Rohres gegeben. Sobald sich die Luft im Rohr in Resonanz befindet, häuft sich der Staub, im Bestreben, die bewegten Zonen zu meiden, in den von Knoten eingenommenen Zonen, und wir können eine der Abbildung entsprechende Figur beobachten.

Die Kundtsche Röhre bietet auch heute noch im elementaren Physikunterricht ausgezeichnete Dienste.



Kundtsche Röhre

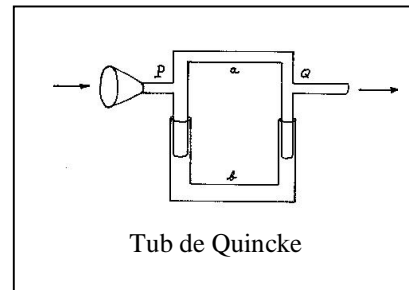
Stimulieren wir zwei Punkte auf der Oberfläche eines Sees mit derselben Frequenz, können wir eine bidimensionale stehende Welle beobachten. Strahlen zwei Lautsprecher in zwei Punkten des Raums einen reinen Ton derselben Frequenz aus, formt sich eine dreidimensionale Analogie zu den beiden vorangehenden Beispielen. Wenn wir mit dem Ohr verschiedene Zonen des Raums ablauschen merken wir bald, dass in einzelnen Zonen der Schall verstärkt, in anderen, abgeschwächt wird. Auch der Ton einer Stimmgabel (ohne Verstärkung durch einen Resonanzboden) ist in einzelnen Punkten hörbarer als in anderen. Werden zwei Wellen gleicher Frequenz überlagert, entspricht jedem Punkt im Raum eine konstante Phasendifferenz, und das ist die Grundlage der stehenden Welle.

Da im allgemeinen Fall zwei überlagerte Wellen weder die Frequenz noch die Amplitude gemeinsam haben (und daher erst recht nicht die Phase), müssen die Schwebungseffekte, die Differenztöne usw. in jedem Punkt individuell betrachtet werden.

Das INTERFERENZROHR von Quincke, (auch Umwegrohr genannt) besteht aus einer Verzweigung eines akustischen Rohres in zwei Röhre a und b in einem Punkt P, gefolgt vom Zusammenschluss der beiden Röhren in einem Punkt Q. Die Länge des Abschnittes b kann

dank der in der Abbildung schematisierten Anordnung leicht verändert werden.

Diese Anordnung erlaubt es, zwei Töne zu überlagern, die sich nur in ihrer Phase unterscheiden. Der Ausgangston wird in einem Endpunkt des (symmetrischen) Apparates erzeugt, so dass sich die Schallwellen im Punkt P trennen und sich in Q wieder vereinigen. Da das Teilstück a kürzer als b ist, treffen die durch b geleiteten Schwingungen etwas später in Q ein, so dass ein Phasenunterschied entsteht. Wird die Frequenz des Tons so gewählt, dass der Phasenunterschied genau der halben Wellenlänge entspricht, ist das Ergebnis der Überlagerung... die Stille. In diesem Sinn kann das Interferenzrohr von Quincke als ein Antagonist zum Resonator von Helmholtz betrachtet werden, der einen bestimmten Ton verstärkt und alle anderen abschwächt, während im Interferenzrohr das Gegenteil stattfindet.



Auch das folgende, auf Savart zurückführende Experiment dient der Beobachtung der Überlagerung zweier Töne, die sich ausschliesslich in ihrer Phase unterscheiden: Savart erzeugte einen Ton vor einer Wand, so dass sich in den einzelnen Punkten des Raums die von der Schallquelle abgestrahlten und die an der Wand zurückgeworfenen Wellen¹⁸ überlagern. Es ist hier leicht, Bäuche und Knoten zu finden.

¹⁸ In Form eines Echos; üblicherweise wird nur von Echo gesprochen, wenn die Phasendifferenz direkt hörbar ist.

GRAPHISCHE DARSTELLUNG DES TONS UND MASSEINHEITEN

In der Einführung wurde der Begriff der phonographischen Kurve als die Funktionskurve definiert, welche die Elongation als Funktion der Zeit darstellt. Im einfachsten der Fälle ist die phonographische Kurve eine Sinuskurve oder die Überlagerung verschiedener Sinuskurven.

Aber im allgemeinen kann die Kurve recht unregelmässig gestaltet sein. Es sei daran erinnert, dass die Kurve die relative Lage eines schwingenden Objekts in Funktion der Zeit darstellt. Wie wir es im Fall der schwingenden Saite gesehen haben, ist das menschliche Gehör imstande die verschiedenen Partialtöne, aus denen ein musikalischer Ton (also eine periodische Schwingung) zusammengesetzt ist, einzeln herauszuhören. Die Partialtöne können auch mit einem Resonator oder mit einem elektronischen Messgerät ermittelt werden. Wir haben also hier drei verschiedene Systeme, um die Partialtöne eines zusammengesetzten Tones zu bestimmen. Die Figur "Vier periodische Kurven" stellt folgendes dar:

a) Einen Sinuston mit der Formel:

$$y = \sin(x)$$

b) Den gleichen Ton mit einem harmonischen Oberton, dessen Amplitude drei mal kleiner als die des Grundtons ist:

$$y = \sin(x) + \frac{\sin(2 \cdot x)}{3}$$

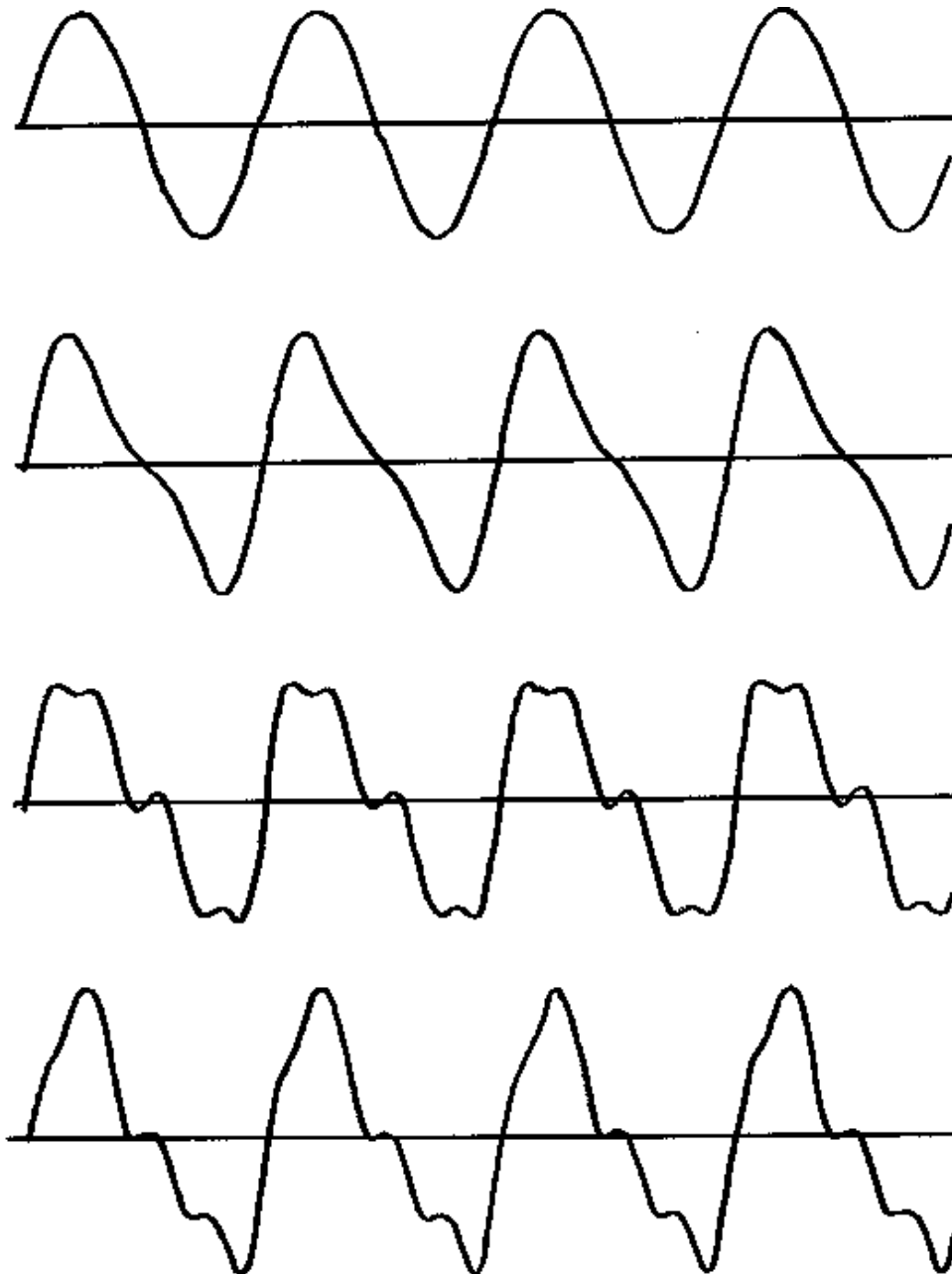
c) Den selben Ton wie in b) mit einem zusätzlichen vierten Partialton, dessen Amplitude fünf mal kleiner als diejenige des Grundtones ist:

$$y = \sin(x) + \frac{\sin(2 \cdot x)}{3} + \frac{\sin(4 \cdot x)}{5}$$

d) Gleich wie in c), aber mit Phasenverschiebung:

$$y = \sin(x) + \frac{\sin(2 \cdot (x - 0.2))}{3} + \frac{\sin(4 \cdot (x + 0.3))}{5}$$

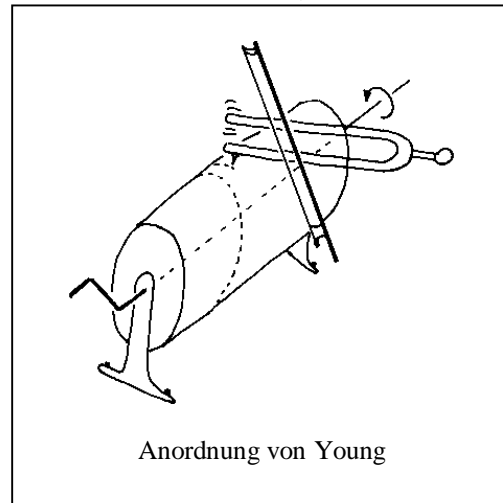
Seltsamerweise sind die Töne a) und b), die sich optisch nur wenig voneinander unterscheiden mit dem Gehör gut unterscheidbar; die Töne c) und d) hingegen, die sich optisch leicht auseinanderhalten lassen, können mit dem Gehör nicht unterschieden werden. Diese Tatsache wird später im Kapitel 'DER SATZ VON FOURIER' erklärt.



4 periodische Kurven

Die Töne, die wir täglich hören sind im Allgemeinen nicht musikalisch (nicht periodisch) und werden daher als "GERÄUSCHE" oder auch als "Lärm" bezeichnet. Geräusche sind nicht periodisch und stellen im strengeren Sinne des Wortes keine Töne dar, obwohl uns das eine oder andere Geräusch an eine gewisse Tonhöhe erinnert, wenn einer der Partialtöne die anderen an Lautstärke übertrifft. Wenn wir ein kurzes Fragment aus einem Geräusch betrachten, können wir es dem musikalischen Ton zuordnen, der bei der periodischen Wiederholung des Fragments entstünde.

Freilich wird die Aufteilung eines Tones in Partialtöne bei der Verkürzung des betrachteten Abschnitts allmählich ungenauer, da es unmöglich ist, eine Periodizität aufgrund eines zu kurzen Kurvenstückes abzuleiten. Besonders tiefe periodische Töne (die entsprechend lange Perioden aufweisen) können anhand eines kurzen Kurvenstückes nicht erkannt werden. Wird andererseits das Kurvenstück verlängert, um genaue Messungen der auftretenden Periodizitäten vornehmen zu können, werden kurze musikalische Töne nicht mehr als solche erkannt. Entsprechende Probleme treten bei der Wahl der Bandbreiten auf. Wir beobachten

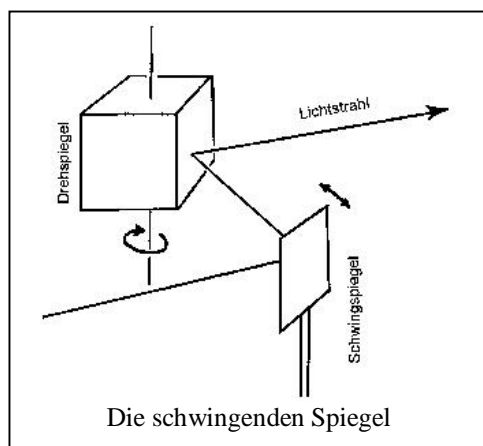


also hier eine gewisse Unbestimmtheit, die formal mit der Unschärferelation von Heisenberg verglichen werden kann.

Eines der ersten Systeme der Geschichte, das erlaubte, eine phonographische Kurve aufzuzeichnen stammt von T. Young, der 1807 die annähernd sinusoidalen Schwingungen einer Stimmgabel auf einen mit Russ überdeckten Zylinder aufzeichnete. Beim Experiment von

Young schrieb eine an einem Arm einer schwingenden Stimmgabel befestigte Nadel die Schwingungen in die Russschicht, während die Schwingungen durch eine Art Geigenbogen unterhalten wurden.

Obwohl heutzutage ausschliesslich der elektronische Oszillograph eingesetzt wird, funktionierten die ersten Oszillographen aufgrund



eines Drehspiegels, der einen an einem schwingenden Spiegel reflektierten Lichtstrahl auf einen Bildschirm projiziert. Diese Anordnung erlaubt es, die phonographische Kurve einer beliebigen periodischen Schwingung darzustellen. An Stelle eines einzelnen Spiegels werden meist mehrere symmetrisch zur Drehachse angeordnete Spiegel m_1, \dots, m_n eingesetzt, wie in der Figur dargestellt.

Der Schwingspiegel muss so angeordnet werden, dass er den Schwingungen folgt, die graphisch dargestellt werden soll. So kann er etwa auf der Spitze einer Stimmgabel befestigt werden, wenn wir eine Analogie des Youngschen Experimentes nachvollziehen wollen. Die Kombination mit einer Membrane, die im Einklang mit den Schallwellen schwingt ermöglicht die Darstellung beliebiger periodischer Klänge. Die Achse¹⁹ des schwingenden Spiegels muss zur Achse des Drehspiegels senkrecht stehen; auf diese Weise wird der vom schwingenden Spiegel reflektierte Strahl hinauf und hinunter schwingen, immer in Richtung zur Drehspiegelachse. Jede Facette des Rotationsapparates projiziert den Strahl von links nach rechts (oder umgekehrt) auf den Bildschirm. Bei der Ablösung der Facette springt der Strahl in die Ursprungsstellung an den linken (oder rechten) Rand des Bildschirms zurück. Passen wir die Drehgeschwindigkeit der Periodizität des Schalls an, erhalten wir eine scheinbar stillstehende Projektion²⁰, die sogar photographisch festgehalten werden kann.

Ab 1864 untersuchte Koenig den Schall mittels einer Kombination des Drehspiegeloszillographen mit einer Gasflamme, die im Rhythmus des Schalls ihre Gestalt verändert. Dies war dank der anschließend beschriebenen manometrischen Kapsel möglich.



Die manometrische Flamme

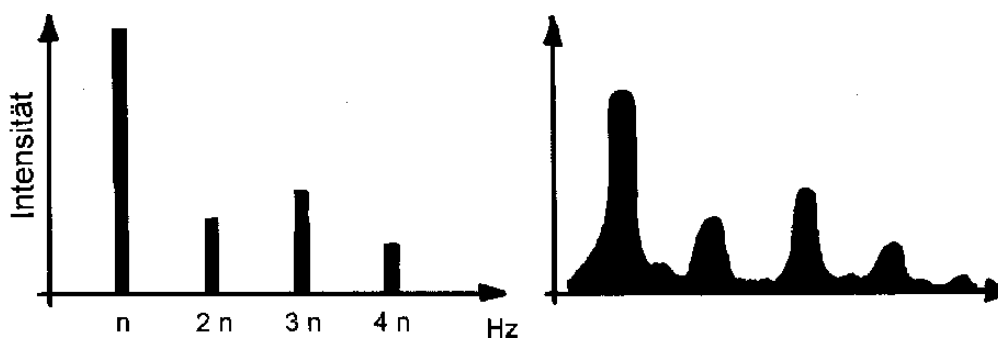
Eine Seite der Kapsel ist mit einer flexiblen Membrane bespannt, die mit den Schallwellen mitschwingen kann. Die gegenüberliegende Seite ist steif und weist je eine Öffnung auf, durch die ein kontinuierlicher Strom von Leuchtgas in die Kapsel (respektive aus der Kapsel) dringt. Das ausströmende Gas wird angezündet. So bewirken kleinste Druckänderungen, wie sie der auf die Membrane wir-

¹⁹ Die Achse des Schwingspiegels ist meist eine imaginäre, zur Drehspiegelachse senkrecht stehende Achse.

²⁰ Ab 20 oder 30 Umdrehungen pro Sekunde täuscht uns unser Sehorgan einen Eindruck von Stetigkeit vor; dieser Effekt ist eine der Grundlagen der Kinematographie.

kende Schall hervorruft, Variationen in der Form und Grösse der Flamme. Die Figur "Die manometrische Flamme" zeigt schematisch drei der möglichen Figuren²¹, die mit dem Drehspiegel erhalten werden können. Die erste entspricht dem gesungenen Vokal *u*. Die zweite und die dritte entsprechen dem Vokal *i*, der im zweiten Fall auf einem höheren Ton gesungen wurde.

Unter den Erfindungen, die der Darstellung der phonographischen Kurve dienen, muss der vom Typographen Scott erschaffene *Phonautographe* aus dem Jahr 1857 erwähnt werden. Der *Phonautographe* arbeitet ähnlich, wie der Phonograph von Edison, erlaubt aber die Wiedergabe des Schalls nicht. Die Aufzeichnung erfolgt wie beim Apparat von Young auf einen mit Russ überdeckten Zylinder. Der *Phonautographe* von Scott sei hier wegen seiner grossen Ähnlichkeit mit dem im Kapitel 'DIE REPRODUKTION DES SCHALLS' besprochenen Phonographen nicht näher beschrieben.



Partialtonspektrum eines periodischen und eines annähernd periodischen Tons

Ein idealer musikalischer Ton (im Sinne der Definition, nicht der Ästhetik, also ein perfekt periodischer Ton) kann als Partialtonspektrum dargestellt werden, wie in der Figur gezeigt. Das Partialtonspektrum informiert uns über die Amplitude der einzelnen Partialtöne, die für die Charakteristik der Klangfarbe der Musikinstrumente mit unterhaltenem Ton eine überragende Bedeutung haben.

Bei einem annähernd periodischen Ton, also einem Ton mit nicht perfekt harmonischen Partialtönen, oder auch einem ganz aperiodischen Ton, geht das Partialtonspektrum in eine stetige Kurve über, die etwa wie der rechte Teil der Figur aussehen kann. Im Falle von aperiodischen Klängen vermittelt uns das Partialtonspektrum nur eine Beschreibung eines bestimmten Augenblicks des Verlaufes des Schalls. Hier hängt das Ergebnis stark von der Länge des betrachteten Intervalls ab.

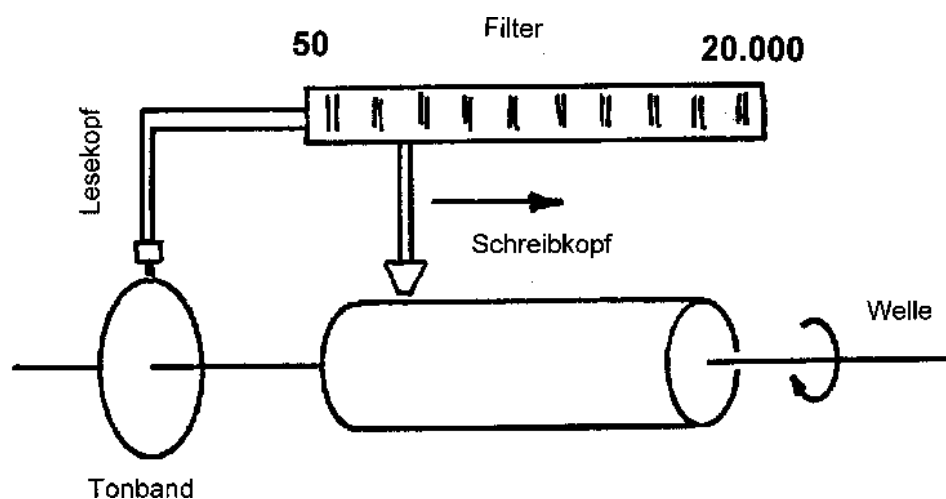
Könnten wir in drei Dimensionen zeichnen, könnte der Schall wie eine Art Skulptur dargestellt werden, indem man ein Koordinatensy-

²¹ Die drei Figuren wurden durch Nachzeichnen einer der Abbildungen des Buches von R. Koenig *Quelques expériences d'acoustique* (Paris, 1882) erhalten.

stem festlegte, in dem die Zeit, die Frequenzen und die Amplituden den drei Koordinatenachsen entsprechen. Um diese Daten graphisch darzustellen, müssen wir uns mit einer Projektion dieses Schallraumes auf die Ebene unseres Zeichenblattes begnügen, das heisst in der Praxis, wir müssen eine perspektivische Abbildung herstellen.

Wenn wir uns eine Beige von chronologisch geordneten Diagrammen vorstellen, die in regelmässigen Zeitabständen auf transparentes Material einer gewissen Dicke angefertigt wurden, können wir uns so ein perspektivisches Diagramm —das an eine phantastische Landschaft erinnern könnte— besser vorstellen.

Um den Schall graphisch darzustellen, entwickelten die Bell Laboratorien den SONOGRAPHEN, der sogenannte SONOGRAMME erzeugt. Im sonographischen System wird die Amplitude der verschiedenen Partialtöne durch Grautöne wiedergegeben. Ein helles Grau bedeutet eine kleine Amplitude, ein dunkles, eine grosse. Eine weisse Fläche bedeutet die totale Abwesenheit des entsprechenden Partialtons.



Funktionsweise des Sonographen

Das Sonogramm wird als ein ideales System zur graphischen Darstellung von Schall betrachtet. Das Funktionsprinzip des Apparates sei hier kurz erläutert:

Eine Schallsequenz wird auf Tonband aufgenommen. Das Band wird auf denselben Zylinder aufgespannt, der auch Träger des Aufzeichnungspapiers ist. Das sonographische Papier ist ein sensibilisiertes Papier, wie etwa Photopapier oder thermographisches Papier. Der Schreibkopf fängt auf der untersten Stufe (auf einer parallelen Linie) mit der Aufzeichnung der Amplituden an, die dem ersten in Betrachtung gezogenen Frequenzbereich entsprechen, z.B. zwischen 50 und 60 Hz. Die Trennung zwischen den verschiedenen Frequenz-

bändern wird mit elektronischen Filtern vorgenommen, die eine ähnliche Aufgabe erfüllen, wie die akustischen Resonatoren von Helmholtz. Sobald der Zylinder eine Umdrehung verrichtet hat, rutscht der Schreibkopf auf das nächste Niveau auf dem Papier und der elektronische Filter wird automatisch an das nächste Frequenzband angepasst (z.B. 60 bis 75 Hz).

Nach einer Anzahl Umdrehungen erhält man auf dem Papier eine Darstellung, die der senkrechten Projektion unseres dreidimensionalen Modells entspricht, wenn wir die Höhe (Amplitude der einzelnen Frequenzen) durch Grauwerte ersetzen.

Soll der Schall quantitativ erfasst werden, muss zwischen zwei Masssystemen unterschieden werden, nämlich den physikalischen und den psychologischen. Die physikalischen Einheiten sind objektiv und unabhängig vom Gehör; die psychologischen variieren von einer Person zur anderen und können sogar vom momentanen Befinden der Person abhängen.

Da die psychologischen Einheiten von den physikalischen abhängen, soll mit letzteren angefangen werden.

Im internationalen metrischen System (SI), das 1960 anlässlich der elften internationalen Konferenz über Masse und Gewichte eingeführt wurde, können alle Masse der klassischen Physik durch sieben Grundeinheiten ausgedrückt werden: der Meter (m) ist die Einheit des Abstandes, die Massen werden in Kilogramm (kg) ausgedrückt, und die Zeitspannen in Sekunden (s). Die elektrische Stromstärke wird in Ampère (A), die Temperatur in Kelvin (K), die Stoffmenge in Mol und die Lichtintensität in Candela (cd) ausgedrückt²². Die anderen Einheiten werden von diesen drei Grundeinheiten abgeleitet. Man spricht manchmal vom MKS-System, um es vom vorher gebräuchlichen CGS-System zu unterscheiden, das den Zentimeter (cm), das Gramm (g) und die Sekunde (s) als Grundeinheiten verwendete. Obwohl die beiden Systeme gleichwertig sind, sollten wir uns heute an die Vereinbarung halten und nur noch das MKS-System anwenden. Da aber in älteren Büchern häufig das CGS-System verwendet wurde, seien die beiden Systeme einander in der Tafel gegenübergestellt.

²² Wer genaueres darüber wissen will, kann die Webseite des "Bureau International des Poids et Mesures", www.bipm.fr konsultieren, die unter anderem eine Übersichtstafel über die Verknüpfung der einzelnen abgeleiteten Einheiten untereinander bietet.

	MKS	CGS	Technische Einheiten
Länge	m	cm	
Masse	kg	g	
Zeit	s	s	
Geschwindigkeit	m/s	cm/s	
Kraft	$N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$	$dyn = \frac{cm \cdot g}{s^2}$	1 kp = 9,81 N
Energie ²³ oder Arbeit	$J = N \cdot m = \frac{m^2 \cdot kg}{s^2}$	$erg = dyn \cdot cm = 10^{-7} J$	1 cal = 4,187 J
Leistung	$W = \frac{J}{s} = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3}$	erg/s	1 PS = 735,7 W
Druck	$Pa = \frac{N}{m^2}$	$\frac{dyn}{cm^2}$	1 atm = 101325 Pa
Intensität	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{erg}{s \cdot m^2}$	

Folgende physikalischen Einheiten sollen anschliessend kurz besprochen werden: Die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Kraft, die Energie, die Leistung, der Druck und die Intensität.

Die GESCHWINDIGKEIT ist der Quotient zwischen dem Weg, den ein Objekt (etwa ein Partikel oder eine Welle) zurückgelegt hat und der Zeit, die es dazu braucht. So ist etwa die mittlere Geschwindigkeit eines Autos, das innerhalb einer halben Stunde 40 km zurückgelegt hat $\frac{40 \text{ km}}{\frac{1}{2} \text{ h}} = 80 \text{ km/h}$. Im MKS-System werden die Geschwindigkeiten in m/s gemessen. Das Auto unseres Beispiels fährt also mit 22,22... m/s.

Ändert ein bewegtes Objekt seine Geschwindigkeit, sagt man, es sei einer BESCHLEUNIGUNG ausgesetzt. Bei abnehmender Geschwindigkeit wird mitunter auch von VERZÖGERUNG gesprochen.

Ist die Beschleunigung gleichmässig, entspricht einem bestimmten Zeitintervall ein konstanter Geschwindigkeitsunterschied. In diesem Fall wird die Beschleunigung als Quotient zwischen dem Geschwindigkeitsunterschied (Zunahme oder Abnahme) und dem entsprechenden Zeitintervall berechnet. Im MKS-System wird die Beschleunigung in $\frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$ ausgedrückt. Ein frei fallender Körper im

²³ Die physikalische **Arbeit** wird in derselben Einheit ausgedrückt, wie die Energie, nach dem Motto: *Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.*

Vakuum liefert ein schönes Beispiel einer gleichmässigen Beschleunigung, mit einer Beschleunigung von ca. $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, dem für die Gravitationskraft auf der Erdoberfläche charakteristischen Wert.

Bewegte Körper haben die Tendenz, die gleiche gerade Richtung und die gleiche Geschwindigkeit beizubehalten, wenn sie frei von äusseren Einflüssen sind.

Die äusseren Einflüsse, die es vermögen, einen Körper von seiner geradlinigen Bahn abzubringen oder seine Geschwindigkeit zu verändern, heissen KRÄFTE. So brauchen wir etwa Kraft, um ein Auto zu bremsen oder zu beschleunigen. Newton fand die folgende Beziehung zwischen der Kraft, der Masse und der Beschleunigung eines Objekts:

$$\mathbf{KRAFT} = \mathbf{MASSE} \cdot \mathbf{BESCHLEUNIGUNG}$$

Im MKS-System ist die Einheit der Kraft das NEWTON (N); ein N ist ein $\frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{s}^2}$ und entspricht der Kraft, die angewandt werden muss, um eine Masse von einem kg um einen $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ zu beschleunigen.

Wird über eine gewisse Wegstrecke eine konstante Kraft auf einen Körper ausgeübt, wird eine gewisse Menge Energie verbraucht (besser: verwandelt); man sagt, es sei eine gewisse Arbeit verrichtet worden. Die Energie, die einer Kraft von einem N über den Abstand eines m entspricht, heisst 1 JOULE (J). Die Einheit Joule entspricht einem N·m, also einem $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2}$. 1 J ist ungefähr die Energie, die wir brauchen, um einen Stein von 100 g Masse um einen m anzuheben. Die Energie²⁴ ist von der Zeitspanne, die es braucht, um sie zu verbrauchen (besser: umzuwandeln) unabhängig.

Sind wir an der Energie interessiert, die innerhalb einer gewissen Zeitspanne umgewandelt wird, so brauchen wir den Begriff der LEISTUNG. Die Leistung ist der Quotient zwischen der Energie und der Zeit und wird in WATT (W) gemessen. Das Watt lässt sich unter Anwendung der Grundeinheiten folgendermassen ausdrücken:

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^3}$$

Um die in der Akustik üblichen quantitativen Masseinheiten auszudrücken brauchen wir noch zwei weitere Definitionen, nämlich die des Drucks und die der Intensität.

²⁴ Analog kann gesagt werden: *Die Arbeit ist von der Zeitspanne, die es braucht, um sie zu verrichten, unabhängig.*

Der DRUCK ist die auf eine Oberfläche angewandte Kraft und wird in PASCAL (Pa) gemessen. Man spricht von einem Pa Druck, wenn die Kraft von einem N auf eine Oberfläche von einem m^2 wirkt.

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{m^2} = 1 \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{s^2 \cdot m^2} = 1 \frac{\text{kg}}{m \cdot s^2}$$

Jeder kennt intuitiv die Erscheinung des Drucks, wie er etwa in einem Wasserschlauch wirkt. Hier interessiert uns vor allem der von den Schallschwingungen erzeugte akustische Druck. Die Lautstärke steht in direktem Verhältnis zum Quadrat des akustischen Drucks.

Die INTENSITÄT ist durch die Wirkung einer bestimmten Leistung auf eine konstante Oberfläche gegeben. Sie wird als $\frac{W}{m^2}$ ausgedrückt. Mitunter wird die Intensität auch als Leistungsdichte bezeichnet. Bei der Wahrnehmung eines Tons ist die physikalische Intensität der auf unser Trommelfell auftreffenden Schallwellen ein ausschlaggebender Faktor. Bald aber werden wir sehen, dass bei der Lautstärkenempfindung noch ganz andere Faktoren mitspielen.

Die Stärke des psychologischen Empfindens ist nicht zur Intensität des auslösenden Reizes proportional. Diese Tatsache wurde von Weber untersucht, der 1834 das Gesetz²⁵ prägte:

"DIE KLEINSTE NOCH WAHRNEHMBARE ZUNAHME EINES REIZES IST EIN KONSTANTER BRUCHTEIL DES WAHRGENOMMENEN WERTES."

Die Verallgemeinerung dieses Gesetzes durch Fechner ist die heute als Weber-Fechnersches Gesetz bekannte Tatsache:

"DIE EMPFINDUNGEN SIND PROPORTIONAL ZUM LOGARITHMUS DES REIZES."

Unabhängig von Weber und Fechner, kam schon um 1836 der Astronom, Physiker und Fabrikant optischer Präzisionsinstrumente C. A. Steinheil zum Schluss, dass die scheinbaren Helligkeiten der Sterne sich verhalten, wie die Logarithmen ihrer physikalischen Leucht-Intensität.

Zünden wir zum Beispiel in einem von einer einzigen Kerze beleuchteten Raum eine zweite Kerze an, empfinden wir nicht die

²⁵ Man findet meist die folgende, gleichwertige Formulierung: *"Der Zuwachs zu einem Reiz muss in einem bestimmten, gleichbleibenden Verhältnis zu diesem stehen, damit ein merklicher Empfindungsunterschied stattfindet."*

doppelte Lichtmenge. Zünden wir andererseits eine dritte Kerze an, empfinden wir eine gleiche Zunahme, wie wenn wir die Beleuchtung in einem Raum mit 8 Kerzen durch 4 weitere Kerzen ergänzen.

Brauchen wir beim Anheben eines Gewichtes von 2 kg Masse ein Minimum von 0,3 kg um den Gewichtsunterschied feststellen zu können, so brauchen wir bei einer Masse von 10 kg eine Zunahme von 1,5 kg.

Ein weiteres Beispiel aus dem Bereich der Frequenzen: Ein bestimmtes Intervall, wie etwa eine Quinte, ist durch eine proportionale Frequenzzunahme bestimmt, nicht durch eine lineare Zunahme. Das gleiche ist natürlich auch bei der Wahrnehmung akustischer Lautstärke der Fall.

Um die physikalischen Einheiten den psychischen Wahrnehmungen anzupassen wurde die Einheit Bel²⁶ festgelegt, eine logarithmische Einheit, die die proportionale Zunahme an Intensität beschreibt. Das Bel ist also eine physikalische Einheit, nicht eine psychologische, wie manchmal behauptet wird. Für praktische Zwecke wird das Bel üblicherweise in 10 Dezibel (dB) unterteilt.

Ein in dB ausgedrückter Wert bezieht sich also nicht auf eine bestimmte Intensität, sondern auf das Verhältnis zwischen zwei Intensitäten. Trotzdem kann eine Intensitätsskala in dB aufgestellt werden, wenn von einer Grundintensität ausgegangen wird, die dem Grad 0 der Skala entspricht. Als Grundintensität pflegt man die kleinste von einem durchschnittlichen Menschen noch wahrnehmbare physikalische Intensität zu wählen. Dieser unglaublich kleine Wert von etwa $10^{-16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ entspricht einem akustischen Druck von etwa $2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Wird von einer Grund-Intensität von I_g ausgegangen, kann jede Intensität durch Anwendung der folgenden Formel in Bel umgewandelt werden, wobei das Symbol \lg für den Zehnerlogarithmus steht:

$$\text{Anzahl Bel} = \lg \frac{I}{I_g}$$

Um die Anzahl dB zu erhalten, muss der Wert in Bel lediglich mit 10 multipliziert werden²⁷.

²⁶ Zu Ehren von Alexander Graham Bell (1847-1922), dem Erfinder des Telephons.

²⁷ Da die Intensität mit dem Quadrat des akustischen Drucks zunimmt, müssen wir unsere Formel leicht anpassen, wenn wir die Intensitätszunahme anhand der Zunahme des akustischen

Drucks von p auf q berechnen wollen: Anzahl dB = $10 \cdot \lg \left(\frac{p}{q} \right)^2 = 20 \cdot \lg \left(\frac{p}{q} \right)$

Die Anwendung der Einheit dB beschränkt sich nicht auf die Akustik. In unserem Beispiel mit den Kerzen können wir die Anzahl dB zwischen der Beleuchtung mit einer oder mit zwei Kerzen berechnen:

$$10 \cdot \log (2/1) = 3,0102 \text{ dB}$$

Bis jetzt ist alles berechenbar. Aber zwei Effekte komplizierten die Verhältnisse: Erstens ist das menschliche Gehör in den verschiedenen Frequenzbereichen nicht gleich empfindlich und zweitens ist das Gesetz von Weber und Fechner nicht mit mathematischer Genauigkeit anwendbar.

Die Empfindlichkeitsverteilung des Gehörs wird im ISOSONIE-DIAGRAMM dargestellt, das zu Ehren seines Schöpfers Harvey Fletcher meist als FLETCHER-DIAGRAMM bezeichnet wird. Die Abszissenachse des Diagramms entspricht den Frequenzen der sinusoidalen Töne, die es zu hören gilt; die Ordinatenachse entspricht der Intensität in dB. Die unterste Kurve entspricht der HÖRGRENZE für die betreffenden Töne. Am empfindlichsten ist das Gehör im Bereich von 3000 Hz. Man beachte, dass die Ordinate logarithmisch ist, um die grossen Unterschiede in der Empfindlichkeit unseres Gehörs in den verschiedenen Frequenzbereichen richtig einschätzen zu können. So muss etwa ein Ton von 50 Hz mit einem fast 100 mal höheren akustischen Druck erzeugt werden, um gleich laut empfunden zu werden wie ein Ton von 3000 Hz, was einer Intensitätszunahme um einen Faktor 10000 entspricht. Wir finden noch wesentlich grössere Werte, wenn wir Frequenzen unter 50 Hz oder über 15000 Hz betrachten.

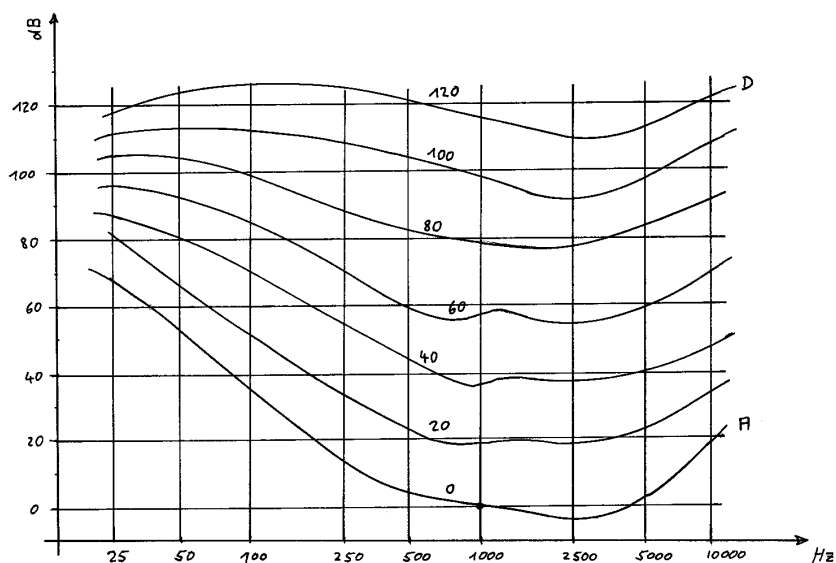


Diagramm von Fletcher

Die Fläche unterhalb der Hörgrenze ist die Zone des Unhörbaren. Erhöhen wir aber die physikalische Intensität einer Sinusschwingung beliebig, werden wir von einer gewissen Intensität an Schmerzen verspüren und es besteht sogar die Gefahr einer unwiederbringlichen Schädigung unseres Gehörs. Die oberste Kurve im Diagramm entspricht der SCHMERZGRENZE für die verschiedenen Frequenzen. Die Zone zwischen der Hörgrenze und der Schmerzgrenze entspricht den hörbaren Tönen.

Wie schon erwähnt, gilt das Gesetz von Weber-Fechner nicht mit mathematischer Genauigkeit, sondern bildet nur eine Annäherung an die Verhältnisse. Aber für Frequenzen um 1000 Hz ist das Gesetz ziemlich genau. Fletcher nutzte diese Tatsache aus, um eine psychologische Einheit zu schaffen, mit welcher sich die Wahrnehmung von Tönen quantitativ erfassen lässt, das PHON.

**DEFINITIONSGEMÄSS IST DIE ANZAHL DB EINES SINUSTONS VON
1000 HZ GLEICH DER ANZAHL PHON.**

Die anderen Werte werden durch experimentalen Vergleich der Lautstärken des zu prüfenden Tons mit verschiedenen Lautstärken des Referenztons von 1000 Hz ermittelt. Die Hörgrenze, also die Kurve, welche die hörbaren von den unhörbaren Tönen trennt, enthält alle Töne von 0 Phon. Schmerz pflügt sich ab 120 Phon einzustellen. Wir empfinden alle Töne von beispielsweise 40 Phon als gleichlaut.

Wie alle psychologischen Masseinheiten, variiert die Phontafel von einer Person zur anderen, da jedem einzelnen Gehör individuelle Isonomie-Kurven entsprechen. Aber dies ist nicht der Grund, welcher Anlass zur Begründung einer weiteren Masseinheit für Lautstärken, des SONS, gegeben hat. Das Motiv ist, dass die Phon-Werte nicht additiv sind. So weist etwa ein Ton mit der doppelten psychologischen Lautstärke eines Tons von 30 Phon nicht 60 Phon auf.

Für Töne mittlerer Höhe und Intensität (bei 1000 Hz) entspricht eine Zunahme von 10 dB ungefähr einer Verdoppelung der Lautstärkeempfindung. In diesem Fall nimmt die physikalische Energie um einen Faktor 10 zu, da $10 \cdot \lg(10) = 10$ ist. Aber das lässt uns keine Regel herleiten, da diese auf mittlere Lautstärken und Frequenzen beschränkt wäre.

Definitionsgemäss wurde der Wert von 40 Phon einem Son gleichgesetzt. Die anderen Werte wurden experimentell ermittelt und das Resultat war die folgende Tafel, welche die psychologischen Masseinheiten Phon und Son einander gegenüberlegt:

Phon	10	20	30	40	60	80	100	120
Son	0,015	0,1	0,4	1	4	20	100	600

Dieser Tafel können wir etwa entnehmen, dass wir zwischen einem Ton mit 20 und einem anderen mit 30 Phon (10 Phon Zunahme) eine vierfache Lautstärkenzunahme empfinden. Die gleiche Zunahme haben wir zwischen Tönen von 40 und 60 Phon (20 Phon Zunahme).

Im gleichen Sinn, wie die Wahrnehmung der Lautstärken das Weber-Fechnersche Gesetz nicht strikte erfüllen, finden wir auch bei der Wahrnehmung der Tonhöhen (also der Frequenzen) gewisse Abweichungen. Tatsächlich ist es so, dass beim Messen der als rein empfundenen Intervalle (Terzen, Quarten, Quinten, Oktaven, ...) in verschiedenen Frequenzbereichen, gewisse charakteristische Abweichungen festgestellt werden.

Diese Tatsache hat zur Schaffung einer psychologischen Frequenzskala geführt, dessen Einheit das Mel ist. Die allgemeine Tendenz des Gehörs besteht darin, hohen Frequenzen zu niedrige und tiefen Frequenzen zu hohe Werte beizumessen. Das Experiment hat gezeigt, dass die psychologische Tonhöhe nicht ausschliesslich von der Frequenz des Tons, sondern auch von dessen Intensität, von seinen Partialtönen (die weitgehend die Klangfarbe bestimmen), von seiner Dauer und von ein paar anderen Faktoren abhängt.

EINHEIT	BESCHREIBUNG
Bel, dB	Physikalische Einheiten für die Intensitätszunahme
Phon	Psychologische Einheit für die Intensitätszunahme
Son	Additive psychologische Einheit für die Intensitätszunahme
Hz	Physikalische Einheit für die Frequenz und Tonhöhe
Mel	Psychologische Einheit für die Tonhöhe

DAS GEHÖR

Wie jedermann weiss, ist das Organ unseres Gehörsinns das Ohr. Aber viele sind sich nicht bewusst, dass das menschliche Ohr ein weiteres wichtiges Sinnesorgan birgt. In der Tat verbirgt sich in unserem Innenohr auch der GLEICHGEWICHTSSINN, dessen Bedeutung vielfach verkannt wird, und den der Volksmund in seiner Formel von den fünf Sinnen ganz einfach ignoriert und beim sechsten Sinn an Esoterik und Aberglauben denkt.

Auch der Wissenschaft blieb der Gleichgewichtssinn lange verborgen, und nur dank den grausamen Vivisektions-Experimenten von Flourens, Goltz und anderer Forscher des XIX Jahrhunderts wurde es schliesslich möglich, den Sitz des Gleichgewichtsorganes der Vögel und der Säugetiere zu orten.

In diesem Zusammenhang beschränkt sich unser Interesse für das menschliche Ohr auf den Gesichtspunkt des Gehörs. Die anatomischen Zeichnungen, die diese kleine Einführung begleiten sind streng schematisch gehalten und dienen hauptsächlich der Erläuterung des Weges, den die Schallwellen nach ihrem Eintritt durch die Ohrmuschel bis zum empfindlichen Teil des Gehörs, dem CORTISCHEN ORGAN, zurücklegen. Die Entdeckung dieses kleinen, schwer zugänglichen und sorgfältig verborgenen Bestandteils unseres Gehörorgans war ein Bravourstück, das Alfonso Corti bereits 1846 vollbrachte.

Üblicherweise wird das Ohr in drei Gebiete aufgeteilt: Das ÄUSSERE OHR, das hauptsächlich aus der OHRMUSCHEL (5) und dem ÄUSSEREN GEHÖRGANG (1) besteht, das MITTELOHR und das INNENOHR. Im ersten Gebiet verbreiten sich die Schallwellen in der Luft ab. Im zweiten Gebiet werden die Schwingungen durch festes Material, nämlich Knochen, geleitet. Im Innenohr schliesslich, wo die Schallwellen in Nervenimpulse verwandelt werden, ist der Kommunikationsträger flüssig.

Eine Membran, das TROMMELFELL (2), trennt die ersten beiden Gebiete des Gehörs voneinander, zwei weitere Membranen begrenzen das Mittelohr vom Innenohr: das OVALE FENSTERCHEN (3) und das RUNDE FENSTERCHEN (4).

Der sichtbare Teil des Aussenohrs besteht aus der Ohrmuschel (5). Obwohl diese bei der Wahrnehmung von Musik oder einem Gespräch nicht unentbehrlich ist, ist doch experimentell festgestellt worden, dass sie bei der Ortung von Schallquellen eine wichtige Rolle spielt.

Durch den äusseren Gehörgang (1), ein leicht gekrümmtes Rohr von etwa 2,5 cm Länge, breiten sich die Schallwellen fort und übertragen ihre Schwingungen auf das Trommelfell (2), das die Grenze zwischen äusserem Ohr und Mittelohr bildet.

Das Mittelohr ist in einer Aussparung im Felsenbein gelagert, der sogenannten PAUKENHÖHLE. Auf seiner inneren Seite leitet das Trommelfell die Schwingungen an den HAMMER (*Malleus*) (6) weiter, das erste Element einer aus drei Knöchelchen aufgebauten Kette. Dieser leitet die Schwingungen an das zweite, scharnierartig angebrachte Knöchelchen weiter, den sogenannten AMBOSS (*Incus*) (7), der seinerseits mit dem dritten Knöchelchen, dem STEIGBÜGEL (*Stapes*) (8) verbunden ist. Letzterer haftet auf einer der beiden Membranen, die das Mittelohr vom Innenohr begrenzen, dem ovalen Fensterchen oder Vorhoffenster (3). Die Figur "Anatomische Teile des Gehörs" lässt den Weg der Schallschwingungen durch die drei Knöchelchen erkennen. Ein Muskel, der *Musculus tensor tympani* (9) erlaubt es, die Intensität der Schallwellen auf ihrem Weg zum Innenohr zu dämpfen. Bei älteren Leuten arbeitet dieser Muskel oft nicht mehr einwandfrei, was die Schmerzgrenze herabsetzt und das Paradoxon erklärt, dass gerade Leute mit reduziertem Hörvermögen am meisten über den Lärm klagen. Dieser Muskel erfüllt eine ähnliche Aufgabe wie das antagonistische Muskelpaar²⁸ das die Erweiterung der Iris unseres Auges reguliert.

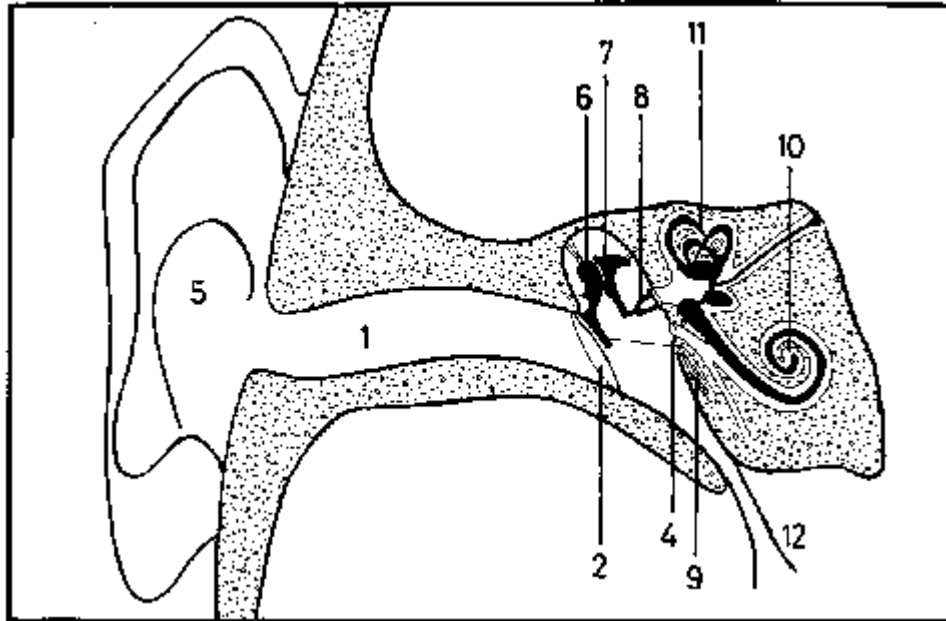
Das Mittelohr ist über die OHRTRUMPETE (*Tuba auditiva*, nach ihrem Entdecker, Bartolomeo Eustachio (1524-1574) auch Eustachische Röhre genannt) mit dem Rachenraum verbunden, was ermöglicht, den Luftdruck im Mittelohr den atmosphärischen Verhältnissen anzupassen. Fahren wir etwa mit dem Auto eine Passstrasse hinunter, merken wir, wie sich der Druck beim Schlucken oder Gähnen ausgleicht. Ist die Öffnung bei einer Erkältung verstopft, kann der Druckunterschied zwischen Mittelohr und Umwelt sehr störend sein; beim Tauchen kann ungenügender Druckausgleich dem Trommelfell schweren Schaden zufügen.

Das Innenohr ist ein extrem komplizierter Apparat, der hauptsächlich aus dem LABYRINTH besteht, welches das von PERILYMPHE

²⁸ Das Paar besteht aus dem *Musculus sphincter pupillae* und dem *Musculus dilatator pupillae*.

umgebene HÄUTIGE LABYRINTH enthält. Das Häutige Labyrinth seinerseits enthält eine andere Flüssigkeit, die ENDOLYMPHE.

Das knöcherne Labyrinth wird in zwei Sektionen aufgeteilt, die SCHNECKE (10), die das eigentliche Hörorgan beherbergt und die BOGENGÄNGE (11) welche dem Gleichgewichtssinn angehören. Beide Sektionen sind durch das *Vestibulum* oder Vorhof (13) (im Bereich des Vorhoffensters (3), das die Schallschwingungen des Steigbügels weiterleitet) voneinander abgegrenzt.



Querschnitt durch das Ohr

Ein Kanal, der PERILYMPHGANG oder *Ductus perilymphaticus* (14) verbindet das Gehörorgan mit dem subarachnoidalraum des Gehirns.

Im knöchernen Labyrinth, im Schutze des Felsenbeins, fließt die Perilymphe, in welcher das häutige Labyrinth schwimmt, das zwei deutliche Bläschen aufweist: das GROSSE VORHOFSÄCKCHEN (*Utriculus*) (15), in das die Bogengänge münden, und das KLEINE VORHOFSÄCKCHEN (*Sacculus*). Die beiden Bläschen sind miteinander durch den *CANALIS UTRICULOSACCULARIS* verbunden, von dem ein dünner Schlauch abzweigt, der *DUCTUS ENDOLYMPHATICUS* (17), der blind endet.

Sowohl der *Utriculus*, wie der *Sacculus* enthalten Sinnesepithel (*Macula sacculi* und *Macula utriculi*). Die Bogengänge (*Ductus semicirculares*) haben Hufeisenform und sind in zueinander annähernd senkrechten Ebenen gelegen. Die Bogengänge sind in Vögeln besser entwickelt, die zum Überleben einen weit besseren Raumorientierungssinn brauchen als wir Menschen.

Die Schnecke beschreibt ungefähr zweieinhalb Windungen. In unserer schematischen Darstellung haben wir den Verlauf des Schneckengangs reduziert. Die Schallwellen werden über das ovale Fensterchen (auch Vorhoffenster genannt) übermittelt und durchlaufen die VORHOFTREPPE (18) oder *Scala vestibuli* bis zur Spitze der Schnecke, von wo aus sie über die PAUKENTREPPE (19) oder *Scala tympani* bis zum runden Fensterchen (auch Schneckenfenster genannt) gelangen.

Die Zone, in der die Vorhoftreppe und die Paukentreppe zusammenlaufen, die Spitze der Schnecke, heisst SCHNECKENLOCH oder *Helicotrema* (20). Die Schallwellen bewegen sich also durch die Perilymphe der knöchernen Schnecke und bringen dabei die Schneckenkanal (26) oder Ductus cochlearis²⁹ enthaltene Endolymphe zum Schwingen. Das letzte Teilbild unserer Abbildung stellt einen Querschnitt durch den Schneckenkanal dar, umgeben von der Vorhoftreppe (oben links im Bild), der *STRIA VASCULARIS* (rechts im Bild) und der Paukentreppe (unten). Im Schneckenkanal liegen die eigentlichen Sinneszellen, angeordnet im Cortischen Organ (27). Die gestarteten Zonen des Bilds entsprechen der Perilymphe, die weisse Zone der Endolymphe.

Die Endolymphe ist also in einem Kanal von annähernd dreieckigem Querschnitt enthalten. Angrenzend an die Paukentreppe, auf der als Basilarmembran (21) oder *Lamina basilaris* bezeichneten Zone liegt, unter einer gallertartigen Schicht, der *LAMINA TECTORIAL* (24) das eigentliche CORTISCHE ORGAN.

Dieses besteht im wesentlichen aus zwei mit bewimperten Sinneszellen bestückten Bändern, dessen Haarzellen gegen die *Lamina tectorial* ausgerichtet sind. Es konnte bisher nicht abgeklärt werden, ob die Härchen der Sinneszellen die *Lamina tectorial* berühren, oder ob sie ausschliesslich durch die Bewegung der Endolymphe gereizt werden.

Drei Kanäle begleiten das Cortische Organ auf seiner gesamten Länge. Deren Funktion ist bisher nicht aufgeklärt worden, aber es scheint, als ob sie eine der Perilymphe ähnliche Flüssigkeit enthielte. Ganz allgemein kann gesagt werden, dass die von den Sinneszellen des Cortischen Organs abgegebenen Impulse über den *NERVUS COCHLEARIS* (25) ins Gehirn geleitet werden. In Wirklichkeit sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter und eine detaillierte Beschreibung ginge weit über die Absicht dieses Buches.

²⁹ Der Schneckenkanal bildet einen Abschnitt des häutigen Labyrinths.

1 Äusserer Gehörgang, Meatus	14 Perilymphgang
2 Trommelfell	15 Grosses Vorhofsäckchen, Utriculus
3 Vorhoffenster, Fenestra vestibuli	16 Kleines Vorhofsäckchen, Sacculus
4 Schneckenfenster, Fenestra cochlea	17 Endolymphatischer Gang, Ductus endolymphaticus
5 Ohrmuschel	18 Vorhoftreppe, Scala vestibularis
6 Hammer, Malleus	19 Paukentreppe, Scala tympani
7 Amboss, Incus	20 Schneckenloch, Helicotrema
8 Steigbügel, Stapes	21 Basilarmembran, Lamina basilaris
9 Trommelfellspanner, M. tensor tympani	22 Reissnersche Membrane
10 Schnecke, Cochlea	23 Stria vascularis
11 Bogengänge, Ductus semicirculares	24 Lamina tectorial
12 Ohrtrumpete, Eustachische Röhre	25 Nervus cochlearis
13 Vorhof, Vestibulum	26 Schneckenkanal, Ductus cochlearis
	27 Cortisches Organ

Die Schallwellen, die die Perilymphe durchqueren, vermitteln ihre Schwingungen der Basilarmembran, auf welcher die Sinneszellen des Cortischen Organs nacheinander auf die verschiedenen Frequenzen zwischen ca. 20 und über 20.000 Hz ansprechen.

Die Zellen aus der niederen Region der Schnecke, also die an das Schneckenfenster angrenzende Zone, entsprechen den hohen Frequenzen, während die Sinneszellen in der Nähe des Schneckenlochs (Helicotrema) auf die niederen Frequenzen ansprechen.

Helmholtz vermutete, dass die Härchen der Sinneszellen in einer bestimmten Eigenfrequenz mitschwingen und jede der durch diese Schwingung gereizten Sinneszellen nervöse Impulse mit der entsprechenden Frequenz weiterleitete. Es existierte auch die Theorie, wonach die Basilarmembran aus einer ganzen Reihe von Segmenten bestand, die je auf eine ganz bestimmte Frequenz abgestimmt waren. Die Resonanztheorie, die Helmholtz um 1855 wissenschaftlich untermauern wollte, war schon durch die Anatomen des XVII Jahrhunderts intuitiv formuliert worden, wie es die folgenden Schriften beweisen:

Valsalva: "De Aure Humana tractatus"

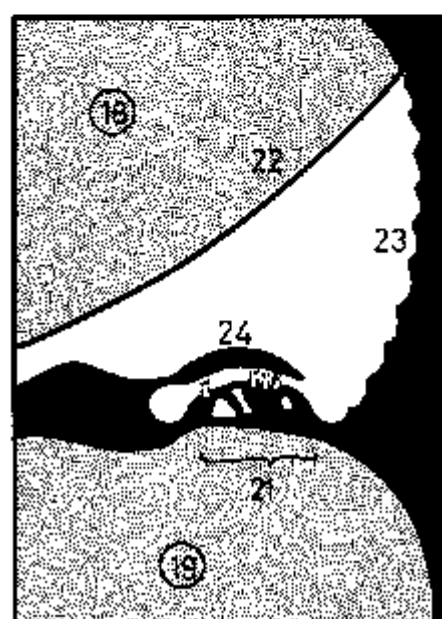
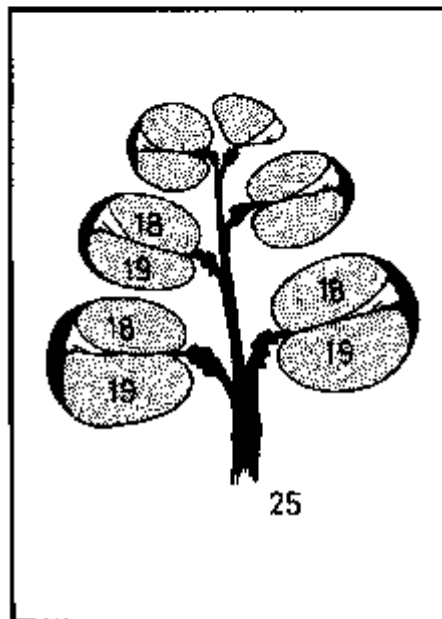
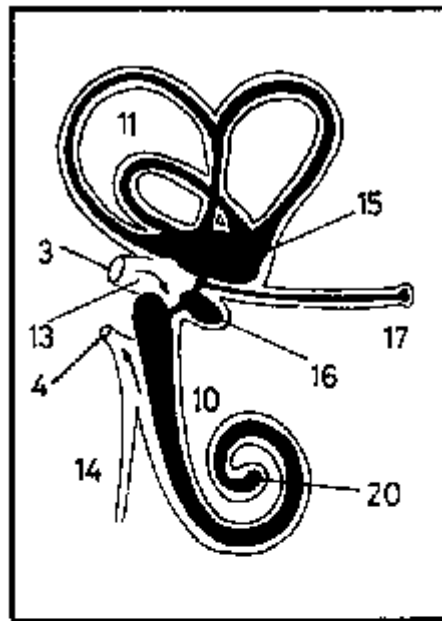
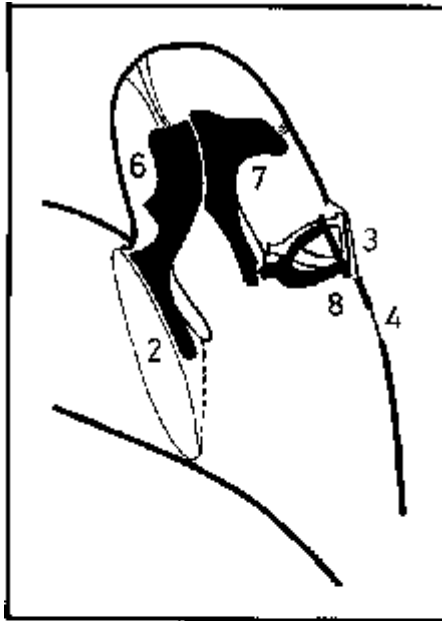
Duverney: "Traité de l'organe de l'ouïe..."

Aber die Resonanztheorie von Helmholtz vermochte gewisse unbestrittene Hörscheinungen nicht zu erklären:

- Hören wir einen aus verschiedenen Frequenzen aufgebauten Klang, ordnet ihm unser Gehör in vielen Fällen eine Tonhöhe zu, die dem grössten gemeinsamen Teiler der beteiligten Frequenzen entspricht, selbst dann, wenn die entsprechende Frequenz selber nicht im Klang vorkommt. Die Überlagerung dreier Töne mit Frequenzen von 1100, 1200 und 1300 Hz lässt uns einen Ton von 100 Hz hören,

der dem ersten Partialton eines Tons mit den harmonischen Partialtönen 11, 12 und 13 entspricht.

- Die Resonanztheorie von Helmholtz vermag die nichtlinearen Distorsionen, wie etwa Differenztöne, Summentöne und subjektiven Partialtöne nicht zu erklären, da nachgewiesen wurde, dass die Distorsion nicht im Bereiche der Hörknöchelchen des Mittelohres entstehen, wie Helmholtz fälschlicherweise vermutete, sondern in der Schnecke selber.



Anatomische Teile des Gehörs

- Die spezifische Empfindlichkeit jedes einzelnen Segments der Basilarmembran auf eine gewisse Frequenz, würde neben ihrer Breite und Dicke, die in den verschiedenen Bereichen verschieden sind, eine beträchtliche Spannung der ganzen Basilarmembran voraussetzen; der Medizin-Nobelpreisträger von 1961, György Békésy, der viele Jahre seines Lebens dem Studium des Gehörs gewidmet hatte, bewies jedoch, dass die Basilarmembran keinerlei Spannung ausgesetzt ist. Auch die Theorie, wonach die Härchen der empfindlichen Zellen des Cortischen Organs wie Resonatoren wirkten, wie wenn es sich beim Cortischen Organ um ein kleines Klavier handelte, dessen Saiten auf Frequenzen zwischen 20 und 20.000 Hz abgestimmt waren, war unhaltbar.

Eine Alternative zur Helmholtzschen Resonanztheorie wurde 1866 von W. Rutherford vorgeschlagen und ist als "Telephontheorie" oder PERIODIZITÄTSTHEORIE bekannt geworden. Rutherford beachtete die Schneckenform nicht und stellte sich vor, dass sich die Aufgabe der Sinneszellen des Cortischen Organs unabhängig von ihrer Lage darauf beschränkten, dem Gehirn die akustischen Druckveränderungen mitzuteilen, etwa wie wenn es sich um eine Art phonographischer Kurve handelte, die es galt, im Gehirn zu analysieren.

Der Periodizitätstheorie können vor allem die beiden folgenden Argumente entgegengehalten werden:

- Einerseits führte die Ablehnung der Lokalisation der verschiedenen Frequenzbereiche auf der Basilarmembran zu einem Widerspruch zu gewissen experimentellen Resultaten. Es kann in der Tat gezeigt werden, dass auf bestimmte Zonen der Basilarmembran beschränkte Verletzungen Hörverluste in den entsprechenden Frequenzbereichen zur Folge haben. Sogar das umgekehrte Experiment konnte durchgeführt werden: Setzt man ein Versuchstier einem intensiven Ton einer bestimmten Frequenz aus, kann das Cortische Organ in einem ganz bestimmten Bereich verletzt werden. Diese Tatsache spricht eindeutig für eine Lokalisationstheorie.

- Andererseits wurde eine Tatsache entdeckt, die auf den ersten Blick alle Kriterien für eine Periodizitätstheorie, wie sie Rutherford vertrat, vernichtete: Eine Neurone kann höchstens 1000 Nervenimpulse pro Sekunde vermitteln. Wie wäre unter diesen Umständen etwa die Wahrnehmung eines Tons von 3.000 Hz mit der Theorie von Rutherford zu erklären?

Die ENTLADUNGSTHEORIE (auf Englisch: *Volley Theory*) von Wever behauptet, dass bei der Übertragung der Töne mit über 1.000 Hz Gruppen von zwei oder mehr Neuronen gleichzeitig tätig werden, die einander ablösen.

Offenbar reichen weder die Lokalisationstheorien im Sinne von Helmholtz noch die Periodizitätstheorien im Sinne von Rutherford für sich alleine aus, um die Funktion des menschlichen Gehörs vollständig zu erklären. Die meisten heutigen Wissenschaftler sind der Meinung, dass die beiden Prinzipien zusammen auftreten.

- Für die niedrigen Frequenzen existiert kein entsprechender Ort auf der Basilarmembran. Für diese Frequenzen werden offenbar die Töne anhand der synchron mit den Schwingungen abgegebenen Impulse der Sinneszellen im Gehirn gedeutet.

- Für die hohen Frequenzen hingegen, scheint ausschliesslich die Lokalisation auf der Basilarmembran zuständig zu sein.

- Für mittlere Frequenzen wird die Lokalisation sinnvoll mit der Periodizität kombiniert.

Nebenbei gesagt, scheint es erwiesen, dass die hochfrequenten Töne nicht den Weg über die drei Hörknöchelchen nehmen, sondern die Schädeldecke durchwandern, um schliesslich auf die Schnecke einzuwirken.

Einzelne Autoren behaupten, dass beim Hören von extrem tiefen Tönen auch die Bogengänge eine Rolle spielen, was nicht ganz auszuschliessen ist.

Aber wie funktioniert die Lokalisation auf der Basilarmembran, wenn wir die Resonanzmechanismen ausschliessen müssen? Die Antwort auf diese Frage verdanken wir dem Nobelpreisträger der Medizin von 1961, György Békésy. Békésy experimentierte mit massstabsgetreu vergrösserten Modellen der Schnecke. Später ging er zu Modellen im Massstab eins zu eins über und er experimentierte sogar mit menschlichen Schnecken. Das Resultat dieser langjährigen Arbeit war die HYDRODYNAMISCHE THEORIE des Gehörs, die man folgendermassen kurz zusammenfassen kann:

Die durch die Schwingungen des Vorhoffensters erzeugte Welle durchläuft die Perilymphe der Vorhoftreppe und anschliessend die Paukentreppe, bis sie am Schneckenfenster reflektiert wird. Da die beiden Gänge nicht zylindrisch, sondern eher konisch sind, formt sich ein Wirbel, der seine grösste Intensität je nach der Frequenz des zu hörenden Tons in einem bestimmten Punkt der Basilarmembran aufweist.

Besteht der zu hörende Ton aus mehreren Sinusschwingungen, entstehen entsprechend viele Wirbel, welche die Basilarmembran in den entsprechenden Punkten zum Schwingen bringen, und damit die nächstgelegenen Sinneszellen des Cortischen Organs.

Im Gegensatz zum Auge kann das Gehör eine Analyse der gehörten Töne vornehmen. Diese Tatsache wird deutlich, wenn ein Musiker imstande ist, die verschiedenen in einem Akkord enthalte-

nen Töne aufzuzählen. Hören wir einen konstanten periodischen Ton, kann unser Ohr die einzelnen Obertöne heraushören. Eine Person mit einem durchschnittlichen Gehör kann mit etwas Übung lernen, den einen oder anderen Oberton aus einem Klavierton herauszuhören. Da wir auch eine nichtperiodische Mischung von Sinustönen³⁰ in seine Komponenten zerlegen können, formulierte Ohm sein Akustikgesetz, das kurz folgendermassen formuliert werden kann:

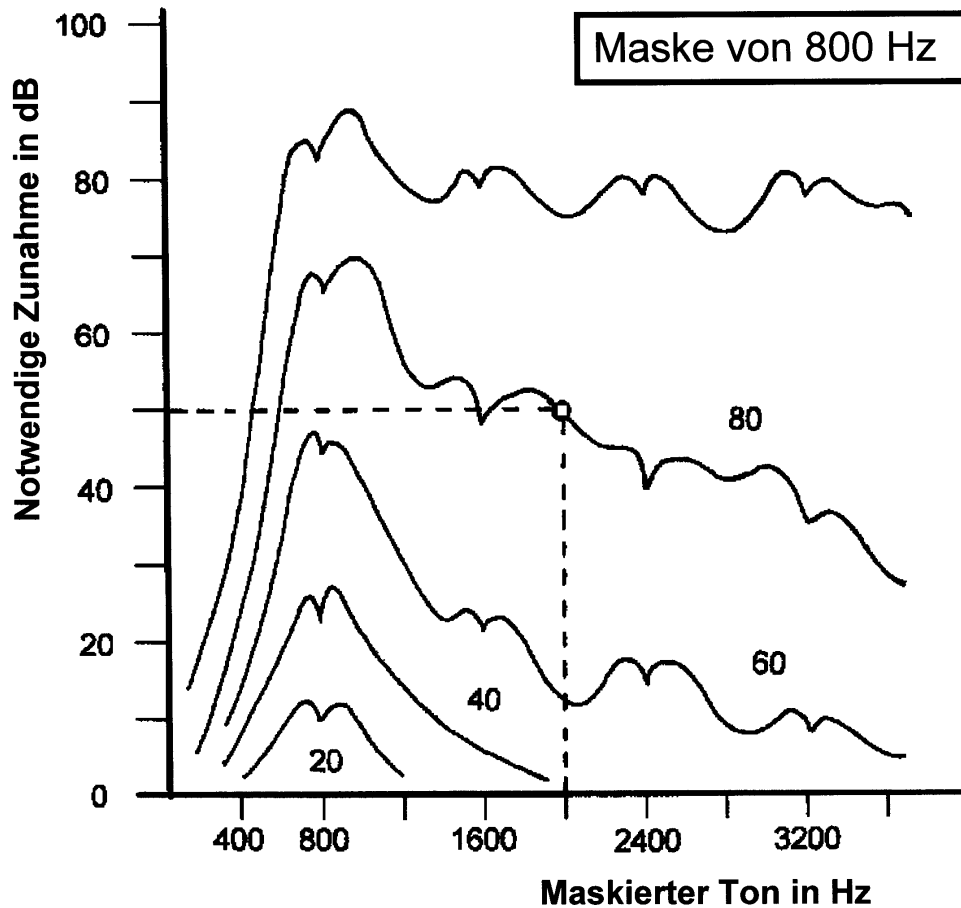
JEDER AUS DER ÜBERLAGERUNG MUSIKALISCHER TÖNE GEBILDETE KLANG KANN DURCH DAS GEHÖR IN PERIODISCHE SCHWINGUNGEN ZERLEGT WERDEN, DIE ALLE EINEM BESTIMMTEN REINEN TON ENTSPRECHEN.

Dieses Gesetz, das nur für lang genug dauernde Töne sinnvoll ist, muss als Annäherung betrachtet werden, da infolge der Wechselwirkung zwischen einzelnen analysierten Tönen gewisse Ausnahmen auftreten.

So ist etwa die Erscheinung der Schwebungen mit dem Ohmschen Gesetz nicht vereinbar. Kombinieren wir etwa einen Ton von 435 Hz und einen anderen mit 440 Hz, erhalten wir einen Ton, dessen Frequenz zwischen den beiden Frequenzen gelegen ist, und der mit einer Frequenz von 5 Hz auf- und abschwilt. Dabei ist es uns unmöglich, die beiden individuellen Töne herauszuhören. Man könnte argumentieren, das Gehör fange bereits einen Ton auf, der die Summe zweier anderer Töne sei. Aber es ist bewiesen, dass akustische Wellen normaler Intensität sich bei ihrer Verbreitung in der Luft durchdringen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Eine andere Erscheinung, die dem Ohmschen Gesetz widerspricht ist die MASKIERUNG eines Tons durch einen anderen. Wie jedermann aus Erfahrung weiss, ist es schwieriger, einem Gespräch an einem lärmenden Ort zu folgen, als an einem ruhigen. Das rührt daher, dass ein gewisser Ton, M, die subjektive Intensität eines Tons anderen Tons, T, reduzieren, und unter Umständen sogar vollständig ausschalten kann. Schon im Jahre 1876 beschrieb A. A. Mayer diese Erscheinung und kam zum Schluss, dass ein tiefer Ton die Wahrnehmung eines höheren teilweise oder ganz ausschalten kann, während ein hoher Ton die Wahrnehmung eines tieferen kaum oder gar nicht zu beeinflussen vermag.

³⁰ Also eine Überlagerung von periodischen Tönen mit inkommensurablen Frequenzen, dh Frequenzen, die keinen (hörbaren) gemeinsamen Teiler haben.



Maskierkurven

Aber die Dinge sind nicht so einfach, wie es schien und H. Fletcher führte eine Reihe Experimente mit verschiedenen Personen durch. Das Grundexperiment hat vier Variablen: Die Frequenz und die Intensität des Maskierungstons M (den wir hier als MASKE bezeichnen werden), die Frequenz des maskierten Tones (hier: TESTTON), und schliesslich die Intensität I von T , die es mindestens braucht, um in Gegenwart der Maske hörbar zu sein. Diese Intensität ist also eine Funktion der anderen drei Variablen. Entsprechend benutzte Fletcher für die graphische Darstellung der Resultate, die er für I erhalten hatte eine Reihe zweidimensionaler kartesischer Koordinatensysteme, eines für jede betrachtete Maskenfrequenz.

In diesen Diagrammen entspricht die Abszisse den Frequenzen der verschiedenen Testtöne, die mit der für das ganze Diagramm gültigen Maske maskiert werden. Die Ordinate entspricht der Charakteristik der Maske für den entsprechenden Testton, also der Anzahl dB, den der Testton über die Hörgrenze angehoben werden muss, um in Gegenwart der Maske wahrgenommen zu werden, wenn diese die Lautstärke in dB (von der Hörgrenze an gerechnet) aufweist, die der entsprechenden Kurve des Diagramms entspricht

(in unserer Abbildung wurden die Kurven für 20, 40, 60, 80 i 100 dB dargestellt). Hier sei nur eines der Koordinatensysteme dargestellt, nämlich dasjenige der Maske von 800 Hz.

Unsere Figur ist schematisch gehalten und entspricht nicht der Charakteristik einer bestimmten Person. Aber es ist zu beachten, dass diese Kurven für jedes Individuum anders ausfallen. Da das Gehör, wie jedes andere Organ, einer gewissen Ermüdung unterworfen ist, werden selbst bei einer gleichen Person temporär verschiedene Resultate erreicht. So kann etwa eine längere Exposition an eine gleiche Frequenz die Empfindlichkeit des Gehörs für die betreffende Frequenz zeitweilig herabsetzen³¹.

BEISPIEL: Welche Intensität muss ein Testton T von 2000 Hz aufweisen, um in Gegenwart eines Maskiertons M von 800 Hz und einer Intensität von 80 dB noch hörbar zu sein?

(Nach Diagramm: 50 dB)

Die Maskierungstafeln von Fletcher sind aufgrund von reinen Tönen entstanden. Selbstverständlich kompliziert die Gegenwart von Obertönen die Situation wesentlich.

In der Figur können wir eine Zunahme des Maskierungseffekts beobachten, wenn T sich der Frequenz der Maske nähert. In unmittelbarer Umgebung von 800 Hz schwächt sich der Effekt wieder etwas ab, bedingt durch die Schwebungen. Obwohl die Messungen mit reinen Tönen vorgenommen wurden, wiederholt sich dieses Verhalten in der Umgebung von 1600 Hz, der Frequenz, die dem ersten Oberton von M entspricht. Das verdanken wir den im Gehör erzeugten nichtlinearen Distorsionen, welche subjektive Obertöne zusammen mit den entsprechenden Schwebungen erzeugt.

Man könnte die verschiedenen Koordinatensysteme in einem einzigen dreidimensionalen System zusammenfassen, wenn wir die den verschiedenen Masken entsprechenden Diagramme auf durchsichtiges Material mit einer gewissen Dicke ausdrücken und das ganze Paket nach Frequenzen sortiert übereinander legen. So erhielten wir für jede Intensität der Maske (z.B. 40 dB) eine Annäherung an eine stetige Fläche.

BINAURALE³² EFFEKTE

Das gepaarte Vorkommen unseres Gehörorgans ist nicht ausschliesslich darin begründet, dass es gut ist, eine Reserve zu haben,

³¹ In extremen Fällen kann sogar ein dauernder Empfindlichkeitsverlust auftreten.

³² Binaural, auf beide Ohren bezogen, im Gegensatz zu monaural, nur auf ein Ohr bezogen.

wie bei anderen menschlichen Organen, wie etwa bei der Niere. Vielmehr dient diese Gegenwart von zwei symmetrischen Organen, wie übrigens auch im Falle der Augen, der räumlichen Orientierung.

Man könnte sich fragen, ob ein Ton M, der dank einem Kopfhörer ausschliesslich auf das linke Ohr einwirkt einen Testton T, der ausschliesslich auf das rechte Ohr einwirkt, maskieren kann. Das Experiment bestätigt dies. Würden wir bei der Beschränkung jedes Tones auf ein einziges Ohr die gleichen Kurven erhalten? Nein, die Wechselbeziehung ist im Falle der getrennten binauralen Exposition viel schwächer. Trotzdem beweist die Gegenwart des Maskeneffektes, dass die Maskierung nicht ausschliesslich im Ohr, sondern vor allem im Gehirn stattfindet. Etwas ähnliches geschieht mit den Schwebungen, da viele Leute auch dann Schwebungen vernehmen, wenn zwei leicht voneinander abweichende Töne individuell jedem einzelnen Ohr zugeführt werden.

Um abzuklären, inwieweit die binauralen Effekte denjenigen Schallwellen zuzuschreiben sind, die sich durch den Schädel fortbewegen, wurden Experimente mit Leuten durchgeführt, die auf einem Ohr taub sind. Die Folgerung war, dass von einer Differenz von 50 dB an die Knochenleitung die Resultate in erheblichem Masse verfälscht.

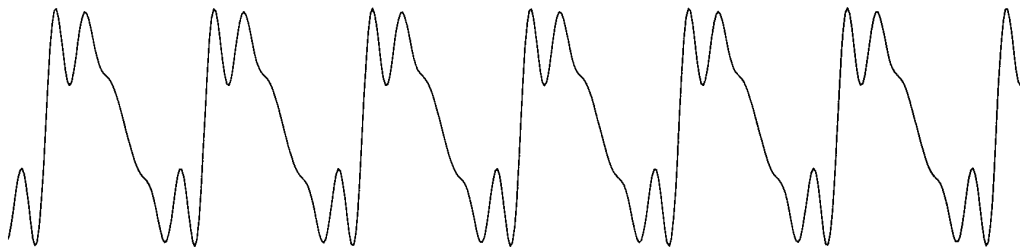
Wir erlauben uns, die binauralen Effekte mit einem visuellen Experiment zu vergleichen, das zur Zeit im Wissenschaftsmuseum von Barcelona nachvollzogen werden kann: In einem binokularen Apparat sieht das linke Auge eine schwarze Silhouette auf einem weissen Hintergrund, während das rechte Auge nur einen weissen Hintergrund sieht. Drückt man auf einen Knopf, so erscheint im rechten Bild eine andere schwarze Silhouette in Form eines Besens, der schnell hin- und herwedelt. Während der Bewegung des Besens verschwindet für das linke Auge die Silhouette.

Die Raumorientierung ist vor allem darauf begründet, dass unser Hirn einen extrem kurzen Zeitabschnitt zwischen der Wahrnehmung eines bestimmten Geräusches durch die beiden Ohren richtig zu interpretieren vermag. Es können Unterschiede in der Grössenordnung von 0,03 Tausendstelsekunden festgestellt werden. Aber es ist uns zudem auch möglich, den Ursprung eines länger andauernden Tons zu bestimmen. Dies verdanken wir der Fähigkeit unseres Gehörapparates, Phasendifferenzen zu erfassen, was unserem Bewusstsein allerdings entgeht. Diese Fähigkeit ist auf nicht allzu hohe Töne beschränkt, was erklärt, wieso es äusserst schwierig ist, Tonquellen mit sehr hohen Frequenzen zu orten. Wir denken dabei etwa an jene Mücken, die so schwierig zu schnappen sind.

DER SATZ VON FOURIER

Im Kapitel 'DIE SAITE ALS TONERZEUGER' wurde beschrieben, wie eine quer schwingende Saite ausser dem Grundton noch mehrere Obertöne produziert. Wir haben gesehen, dass die Frequenzen der von einer idealen Saite erzeugten Obertöne natürliche Vielfache der Grundfrequenz darstellen; man spricht in diesem Zusammenhang von harmonischen Obertönen und der so erzeugte Klang ist periodisch. Die periodischen Schwingungen sind aber gerade diejenigen, die uns am meisten interessieren, da sie musikalische Töne produzieren.

Wir haben gesehen, dass sich die verschiedenen harmonischen Partialtöne mit einem Satz akustischer Resonatoren, aber auch mit elektronischen Filtern oder im Rahmen der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes sogar mit dem Menschlichen Gehör bestimmen lassen, wenn die betreffende Person genügend dazu ausgebildet ist. In diesem letzten Fall muss aber auch die Existenz der vom Gehör selber gebildeten subjektiven Partialtöne beachtet werden.



Kann so eine Kurve mittels Sinuskurven dargestellt werden?

Im Kapitel 'TONÜBERLAGERUNGEN' sahen wir, dass auch Luftsäulen, wie in der Kundtschen Röhre oder in Blasinstrumenten in harmonische Partialtöne zerlegbare periodische Töne erzeugen. Offenbar muss der von einer Lochsirene³³ erzeugte Ton strikt periodisch sein, da er das Resultat eines absolut periodischen Vorganges darstellt, und in diesem Sinne muss zugegeben werden, dass die Sirene einen musikalischen Ton von sich gibt. Das zeigt, dass das Adjektiv

³³ Die Sirene besteht schematisch aus einer in regelmässigen Abständen gelochten kreisrunden Scheibe, durch deren Löcher während ihrer Rotation Pressluft gejagt wird.

'musikalisch', wie es von Helmholtz definiert wurde, nicht unbedingt 'schön' oder 'angenehm' bedeutet. Dieses Beispiel lässt auch die Frage aufkommen, ob sich der Ton einer Sirene in harmonische Partialtöne zerlegen lässt. Oder anders gefragt: Lässt sich jede periodische Kurve in Sinuskurven zerlegen?

Auf den ersten Anblick scheint es unmöglich, eine beliebige periodische Kurve, wie die in der Figur dargestellte, als Überlagerung von lauter Sinuskurven zu interpretieren. Aber vielleicht, wenn wir die Möglichkeit hätten, eine unendliche Menge von Sinuskurven heranzuziehen, könnten wir eine Lösung finden? Oder mehr als eine?

Die Antwort auf diese Frage ist uns durch den berühmten Satz von Fourier gegeben, den heutzutage alle Mathematik- oder Physikstudenten kennen. Der Satz, der erstmals im Jahre 1822 im Buch von Fourier "*Théorie analytique de la chaleur*" veröffentlicht wurde, lässt sich folgendermassen formulieren:

JEDE BELIEBIGE PERIODISCHE FUNKTION KANN AUF GENAU³⁴ EINE WEISE ALS SUMME VON SINUSFUNKTIONEN DARGESTELLT WERDEN, DEREN PERIODEN JE EIN, ZWEI, DREI, ... MAL IN DER PERIODE DER ORIGINALFUNKTION ENTHALTEN IST.

Auf die Musik angewandt, kann dieser Satz folgendermassen formuliert werden:

JEDE PERIODISCHE LUFTSCHWINGUNG STALLT EINEN TON DAR, DER AUF GENAU EINE WEISE IN SINUSSCHWINGUNGEN (DIE PARTIALTÖNE) ZERLEGT WERDEN KANN, DEREN FREQUENZEN GANZZAHLIGE VIELFACHE DER GRUNDFREQUENZ SIND (ES HANDELT SICH ALSO UM HARMONISCHE OBERTÖNE).

Fourier fand für die Zerlegung einer beliebigen Funktion $f(x)$ mit der Periode P in Sinusfunktionen die folgende Formel:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{P} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{P} \right)$$

Mit den folgenden Koeffizienten:

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cdot \cos \frac{2\pi n x}{P} dx \quad ; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

³⁴ Genau eine bedeutet eine und nur eine.

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cdot \sin \frac{2\pi n x}{P} dx \quad ; n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Wenn wir berücksichtigen, dass $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, sehen wir, dass $f(x)$ als Summe von unendlich vielen Sinusfunktionen und einer Konstanten $\frac{a_0}{2}$ darstellbar ist, wobei die Konstante ausschliesslich eine senkrechte Verschiebung der Kurve im Koordinatensystem anzeigt und keine Bedeutung im Bereich der Akustik hat.

Die Koeffizienten a_n und b_n vertreten die Amplitude des entsprechenden harmonischen Partialtons. Der Wert n , der mit x multipliziert wird stellt die Nummer des Partialtons dar. Der erste Partialton, oder Grundton, entspricht $n = 1$.

Die SÄGEKURVE ist eine gute Annäherung an die charakteristische Schwingungsform einer gestrichenen Saite, wie etwa bei der Violine. Die Sägekurve stellt einen Spezialfall dar, in dem alle harmonischen Partialtöne zugleich auftreten, wobei die Amplitude jedes einzelnen zu seinem Index umgekehrt proportional ist.

Anschliessend wollen wir die Sägekurve als Fourier-Reihe darstellen. Unsere Kurve hat im Intervall $[0, 2\pi]$ die folgende Funktionsformel:

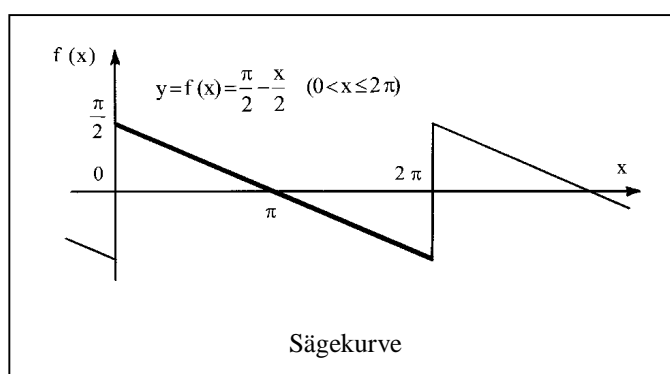
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad ; \text{Periode } P = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot \cos \frac{2\pi \cdot n \cdot x}{2\pi} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos nx - \frac{x}{2} \cdot \cos nx\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin nx - \frac{1}{2n} (x \cdot \sin x) - \frac{1}{2n^2} \cos nx \right]_0^{2\pi}$$



$$= \frac{1}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \sin 2n\pi - \frac{1}{2n} \cdot 2\pi \cdot \sin 2n\pi - \frac{1}{2n^2} \cos 2n\pi \right) - \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin n \cdot 0 - \frac{1}{2n} \cdot 0 - \frac{1}{2n^2} \cdot \cos 0 \right) \right)$$

Die Formel wird dank der folgenden Identitäten wesentlich vereinfacht:

$$\sin 2n\pi = 0$$

$$\cos 2n\pi = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0 \quad ; \text{für } n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \cdot \cos(0 \cdot x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \cdot 2\pi}{2} - \frac{4\pi^2}{4} \right) = \frac{1}{\pi} (\pi^2 - \pi^2) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin \frac{2\pi \cdot n \cdot x}{2\pi} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \cdot \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin nx - \frac{x}{2} \cdot \sin nx \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos nx - \left(\frac{\sin nx}{2n^2} - \frac{x \cdot \cos nx}{2n} \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{2\pi}{n} \cdot \cos 2n\pi - \frac{\sin 2n\pi}{2n^2} + \frac{2\pi \cdot \cos 2n\pi}{2n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{\pi}{2n} \cdot \cos 0 - \frac{\sin 0 \cdot 1}{2n^2} - \frac{0 \cdot \cos 0}{2n} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{2\pi n x}{2\pi}$$

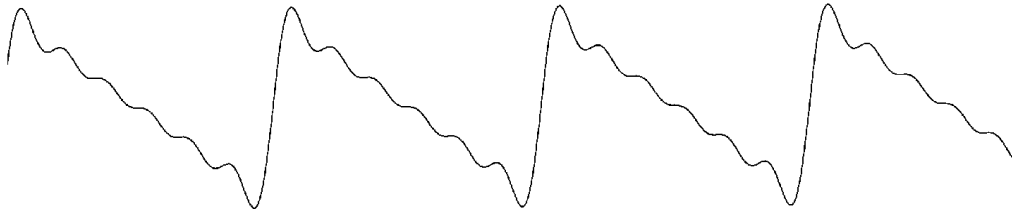
$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

KOROLLAR: Wenden wir diese Fourier-Reihe auf den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ an, erhalten wir als Korollar eine berühmte Reihe, die zu Ehren seines Entdeckers als Leibnizsche Reihe bezeichnet wird. Das Verdienst von Leibnitz ist in der Tatsache begründet, dass zu seiner Zeit die Fourier-Reihen noch unbekannt waren.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0}{6} + \frac{-1}{7} + \dots
\end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Wenn wir anstelle einer unendlichen Menge von Summanden nur die ersten k Glieder einer Fourier-Reihe betrachten (wenn wir also die k -te Partialsumme betrachten), erhalten wir nacheinander verschiedene Annäherungen an die Funktionskurve. Die Abbildung zeigt die Annäherung an die Sägekurve für $k = 6$.



Annäherung an die Sägekurve

Da die Sägekurve alle harmonischen Partialtöne enthält, wird sie in gewissen elektronischen Synthesizern eingesetzt, die durch Filterung der geeigneten Obertöne aus einem Ton, der sämtliche möglichen harmonischen Partialtöne enthält einen Ton mit den gewünschten harmonischen Partialtönen gewinnen können.

Eine andere 'extreme' Kurve, die unsere Beachtung verdient ist die in der Figur dargestellte rechteckige Kurve.

Diese ist aus sämtlichen UNGERADEN Elementen aufgebaut, die zur Sägekurve gehören. Das bedeutet, dass ein Ton, dessen phonographische Kurve diesen Aspekt aufweist, alle Partialtöne mit ungeraden Indices enthält und klingt, wie wenn er einer geschlossenen Orgelpfeife entstammte.



Oben: Annäherung an die rechteckige Kurve. Unten: Dieselben Partialtöne mit Phasenverschiebung

Unter der Darstellung der Annäherung an die rechteckige Kurve haben wir eine andere Kurve dargestellt, die aus der Überlagerung derselben Sinuskurven besteht. In diesem zweiten Fall wurden einige der Sinuskurven verschoben (das heisst in der Praxis, die Sinusfunktion wurden statt auf x auf $(x+v)$ angewandt). Wie wir im Kapitel 'DIE KLANGFARBE' sehen werden, kann unser Gehör die beiden entsprechenden Töne nicht unterscheiden.

Der Satz von Fourier erklärt die Anwesenheit der harmonischen Partialtöne im Ton einer Lochsirene. Er erklärt auch die Erzeugung von Partialtönen durch Distorsion in einem Transduktor, wie etwa in einem Mikrophon oder einem Pick-up (phonographischen Tonab-

nehmer). Eine perfekt sinusförmige phonographische Kurve erfährt eine gewisse Verformung. Da die Periode unverändert geblieben ist (die Tonhöhe also von der Verformung nicht beeinflusst wurde), ist der erste Partialton (Grundton) mit demjenigen der ursprünglichen Reihe identisch. Die Kompensierung der Verformung muss aufgrund höherer harmonischer Partialtöne erfolgen. Das erklärt auch das Auftreten subjektiver Partialtöne in dem speziellen Transduktor, den unser Ohr darstellt.