Calcular con fracciones para todos

M. Riat
riat@pobox.com
Versión 1.0
Burriana, 2014

ÍNDICE DE CAPÍTULOS

Índice de capítulos 2
Conjuntos de números 3
- Los números naturales 3
- Los números negativos y los enteros 3
- Los números racionales 4
- Interpretación de las fracciones 5

Potencias 6
- Multiplicar potencias 6
- Dividir potencias 7

Números primos 8
Divisores y múltiples comunes a dos o más números 10
- El máximo común divisor MCD 10
- El mínimo común múltiple **mcm** 12
- Una relación entre el MCD y el **mcm** de dos números 12

Una interpretación gráfica 13
Transformación de las fracciones 14
- Simplificar fracciones 14
- Ampliar fracciones 15

Sumar y restar fracciones 16
Multiplicación y división de fracciones 17
Fracciones decimales 18
Convertir fracciones decimales en fracciones y viceversa 20
- Fracciones decimales periódicas 20
- Conversión de decimales periódicos 21

Una aplicación: la regla de tres 22
- Regla de tres simple 22
- Regla de tres compuesta 23

Otro sistema para determinar el MCD de dos números 24
Solución de los ejercicios 25
Índice alfabético 30

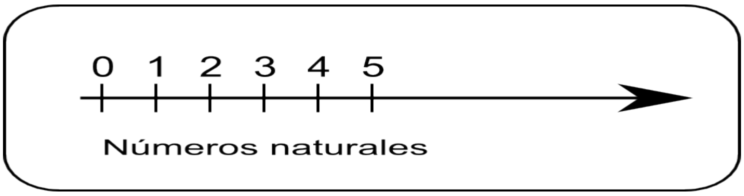
Conjuntos de números

Los números naturales

Se llaman *números naturales* los que se obtienen partiendo de 0 (a veces se empieza con 1), sumando 1 a cada número sucesivo.

Se puede simbolizar a este conjunto con $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Estos números se pueden representar gráficamente sobre una línea:



Hay una infinidad de ellos. Dos números naturales siempre se pueden sumar entre ellos para obtener otro número natural. Pero esto no es el caso de la sustracción: Si intentamos restar dos números enteros, no siempre encontraremos un entero como resultado.

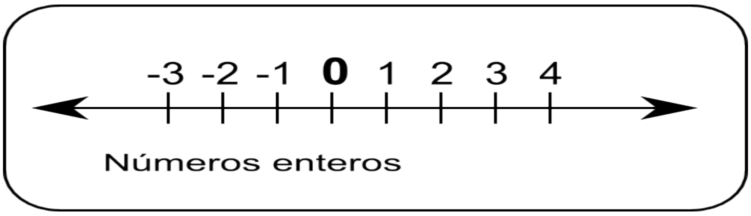
Ejemplos:

- ► 5 - 2 = 3 // Aquí no hay problema
- ► 5 - 10 = ? // No existe ningún número natural

Los números negativos y los enteros

Para poder obtener resultados a todas las sustracciones se introducen los *números negativos:* a cada natural positivo n le corresponde un negativo -n, de manera que su suma es 0.

Conjuntamente con los naturales obtenemos el conjunto de los *números enteros.*



Los números enteros se pueden simbolizar de la manera siguiente:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Dentro del conjunto $\mathbb{Z}$ podemos realizar adiciones, sustracciones y multiplicaciones sin límite. Pero cuando queremos hacer divisiones, nos damos cuenta que no se obtienen siempre resultados dentro del conjunto.

Ejemplos:

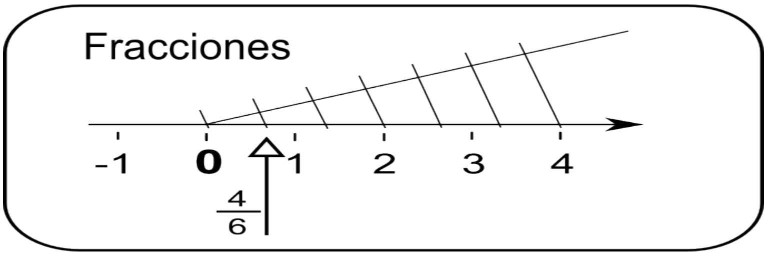
►	12	:	2	=	6	// Aquí no hay problema
►	-14	:	-7	=	2	// Aquí no hay problema
►	17	:	5	=	?	// No existe ningún número entero

LOS NÚMEROS RACIONALES

Otra vez se trata de ampliar nuestro conjunto numérico. Esta vez introducimos pares de números enteros para solucionar el problema. Escribiremos por ejemplo el par 4 y 6 que corresponde al cociente (resultado de la división) en la forma $\frac{4}{6}$. Este símbolo se llama *fracción* o *quebrado.* El número encima de la línea (aquí 4) se llama *numerador,* el número bajo la línea (aquí 6) se llama *denominador* de la fracción. La línea representa la división del numerador por el denominador.

El denominador de una fracción nunca puede ser 0, ya que nunca se puede dividir por 0.

Gráficamente, sobre la línea de los números, la distancia entre el punto 0 y el que corresponde a $\frac{4}{6}$ es igual al cociente que se obtiene dividiendo la distancia entre 0 y 4 en 6 partes.



El conjunto de las fracciones también se llama *números racionales* y se simboliza por $\mathbb{Q}$. Es el conjunto formado por todos los pares ordenados de dos enteros, con la condición que el segundo elemento del par no puede ser nunca 0.

En el conjunto $\mathbb{Q}$ podemos efectuar ilimitadamente todas las adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones. En cada intervalo de la línea de los números, por pequeño que sea este intervalo, hay una infinidad de números racionales.[1]

Aquellas fracciones (o números racionales) cuyo denominador es 1 corresponden a los naturales expresados en el numerador.

Ejemplos:

► $\frac{23}{1}=23$ // Efectivamente, si dividimos 23 por 1,
// obtenemos 23

► $\frac{0}{1}=0$ // El cero se puede multiplicar o dividir por
// cualquier otro número sin alterarse

Interpretación de las fracciones

¿Qué significa una fracción como $\frac{5}{6}$ en la práctica? Imaginemos una pizza. El denominador 6 nos indica en cuantos trozos iguales entre ellos se ha cortado la pizza. El numerador 5 nos indica el número de estos trozos a los que se refiere la fracción $\frac{5}{6}$.

El valor representado por la fracción crece con el numerador y disminuye con el denominador. Si el numerador supera al denominador, la fracción representa un valor superior a 1.

1 Pero a pesar de ello, en la línea de los números todavía existen puntos que no están ocupados por ningún número racional. Estos puntos corresponden a los números irracionales. Incluso hay más puntos de estos que de los otros.

Ahora ya sabemos qué son las fracciones (o números racionales). Más adelante aprenderemos a calcular con ellos. Pero antes tenemos que aprender un par de asuntos más.

POTENCIAS

Si tenemos un producto (resultado de la multiplicación) cuyos factores (cada uno de los valores que se multiplican) son todos iguales entre ellos, llamamos *potencia* a este producto especial. O dicho de otra manera: una potencia es un producto de factores iguales entre ellos.

En este caso llamamos *base* al factor y *exponente* al número de factores que intervienen en el producto. Por ejemplo, en el producto

$p = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

p es la potencia, 3 la base y 5 el exponente.

MULTIPLICAR POTENCIAS

Sólo se pueden multiplicar potencias que tienen la misma base. En este caso hay que aplicar la regla siguiente:

Las potencias con la misma base se multiplican sumando los exponentes.

Ejemplos:

► $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ // Si se escriben las potencias // como productos, es evidente

► $a^2 \cdot a^5 = a^{2+5} = a^7$ // Mismo ejemplo con la variable a

Ejercicio: $5^3 \cdot 5^4 = ?$

Ejercicio: $2^3 \cdot 2^4 \cdot 8 = ?$

Dividir potencias

La división es una multiplicación con el valor recíproco del divisor. ¿Qué es el valor recíproco de un número? y ¿cómo se obtiene?

El *valor recíproco de un número* a es aquel valor que multiplicado por a nos da 1 como resultado. Se obtiene dividiendo 1 por el valor cuyo recíproco queremos obtener. Cuando se trata de hallar el recíproco de una fracción, sólo hay que intercambiar el numerador y el denominador.

Esta última frase ya nos sugiere que el 0, como única excepción, no tiene recíproco, ya que no se puede dividir por 0 y que el denominador de una fracción nunca puede ser 0.

El recíproco de una potencia se obtiene cambiando el exponente por el negativo de su valor.

Regla: El recíproco del recíproco de un número cualquiera es el mismo número. Es como si actuamos un interruptor dos veces, la segunda maniobra anula la primera.

El recíproco de una potencia con base entera es la potencia con el exponente negativo.

Ejemplos:

► El recíproco de 4^5 es 4^{-5}
► El recíproco de 7^{-2} es 7^2

Dijimos que
* Cuando se trata de hallar el recíproco de una fracción, sólo hay que intercambiar el numerador y el denominador

y que
* El recíproco de una potencia se obtiene cambiando el exponente por el negativo de su valor.

Podemos deducir que el recíproco de una potencia con base entera es la fracción con numerador 1 y la potencia dada en el denominador.

Ejemplos:

► El recíproco de 7^3 es $\frac{1}{7^3}=7^{-3}$

► El recíproco de 1 es 1

Ejercicio: **Determina los recíprocos de** $\frac{7}{3}$ **, de** -1 **y de** 5^{-5}.

Podemos dividir dos potencias con la misma base restando los exponentes.

Ejemplo:

► $5^9 : 5^6 = 5^{(9-6)} = 5^3 = 125$

Importante: Ya que cualquier número diferente de 0 dividido por si mismo da siempre 1, nos damos cuenta que cualquier número diferente de 0 elevado a 0 siempre equivale a 1:

► $17^7 : 17^7 = 17^{(7-7)} = 17^0 = 1$

Ejercicio: $2^3 : 2^4 \cdot 16 \cdot 7^0 = ?$

NÚMEROS PRIMOS

En el conjunto de los números naturales hay un subconjunto que fascina los matemáticos desde varios milenios: los números primos.

Los *números primos* son aquellos números naturales que son superiores a 1 y que sólo se dejan dividir por 1 y por si mismos. Los primeros 30 primos son los siguientes:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113

Hay una infinidad de ellos, como ya comprobó el matemático griego Euclides (aprox. 325 – aprox. 265 a.C.).

Para calcular con fracciones los primos son imprescindibles. Hay que aprender a descomponer todos los números enteros en factores primos. Para descomponer un número determinado empezamos a probar si es divisible por el primo más pequeño (el 2).

Cada vez que hemos podido dividir el número, apuntamos el divisor. Luego volvemos a intentar dividir por el mismo divisor, hasta que el cociente ya no sea divisible. Luego pasamos al próximo primo etc. hasta que finalmente obtenemos un primo como cociente.

Ejemplo: Descompón 48 en factores primos.

►	48	=	**2**	·	24
	24	=	**2**	·	12
	12	=	**2**	·	6
	6	=	**2**	·	**3**

24 se puede escribir como $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \; 2^4 \cdot 3$

En las escuelas españolas se representa tradicionalmente así:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Ejemplo: Descompón 85800 en factores primos.

►	8500	=	**2**	·	4250
	4250	=	**2**	·	2125
	2125	=	**5**	·	425
	425	=	**5**	·	85
	85	=	**5**	·	**17**

Representación tradicional:

8500	2
4250	2
2125	5
425	5
85	5

17	17
1	

8500 se puede escribir como $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 17$

Ejercicio: Descompón los números siguientes en factores primos: 1287, 141512, 7425

DIVISORES Y MÚLTIPLES COMUNES A DOS O MÁS NÚMEROS

Para calcular con fracciones es muy importante saber buscar dos valores clave a partir de dos o más números enteros, el máximo común divisor (abreviado aquí como MCD) y el mínimo común múltiple (abreviado **mcm**).

EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR MCD

Se trata aquí de averiguar el máximo entre todos los divisores que son comunes a dos (o más) números dados.

Ejemplo: ¿Cual es el MCD de 24 y 36?

► A) Tenemos la posibilidad de enumerar todos los divisores de los dos números y de buscar el máximo que sea común a ambos:

24: 2, 3, 4, 6, 8, **12**
36: 2, 3, 4, 6, 9, **12**, 18

Hallamos el 12 como MCD. Pero si intentamos aplicar este sistema a números un poco más grandes, veremos que es muy poco práctico.

► B) Hay un sistema mucho más elegante que usa la descomposición de ambos números en sus factores primos:

$24 = \underline{2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot \underline{3}$
$36 = \underline{2 \cdot 2} \cdot 3 \cdot \underline{3}$

O representado a la manera tradicional:

$$
\begin{array}{r|c}
24 & \underline{2} \\
12 & \underline{2} \\
6 & 2 \\
3 & \underline{3} \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|c}
36 & \underline{2} \\
18 & \underline{2} \\
9 & \underline{3} \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
$$

Ahora se trata de multiplicar entre ellos todos los factores que intervienen en su mínima potencia[2] (tomarlos donde hay menos de ellos). Obtenemos el MCD como el producto siguiente:

$$\text{MCD} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \quad 2^2 \cdot 3^1 \quad = 12$$

Se procede de la misma forma cuando hay más de 2 números.

Ejemplo: ¿Cual es el MCD de 1176, 1764 y 490?

► $1176 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{7 \cdot 7}$
$1764 = \underline{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \underline{7 \cdot 7}$
$490 = \underline{2} \cdot 5 \cdot \underline{7 \cdot 7}$

O representado a la manera tradicional:

$$
\begin{array}{r|c}
1176 & \underline{2} \\
588 & 2 \\
294 & 2 \\
147 & 3 \\
49 & \underline{7} \\
7 & \underline{7} \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|c}
1764 & \underline{2} \\
882 & 2 \\
441 & 3 \\
147 & 3 \\
49 & \underline{7} \\
7 & \underline{7} \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|c}
490 & \underline{2} \\
245 & 5 \\
49 & \underline{7} \\
7 & \underline{7} \\
1 &
\end{array}
$$

$$\text{MCD} = 2 \cdot 7 \cdot 7 = \quad 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 49 \quad = 98$$

Cuando dos números no tienen ningún divisor en común, siempre nos queda el 1 como divisor de cualquier número. En este caso se dice que el MCD es 1.

Ejercicio: Busca el MCD de los números siguientes:
A) 8075
B) 3179

2 O en la máxima potencia que es común a todos los números, que es lo mismo.

C) 646

EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLE MCM

Aquí se trata de buscar entre todos los múltiples comunes de dos o más números aquel que es más pequeño. Dos números enteros tienen una infinidad de múltiplos comunes, pero evidentemente el que buscamos no será más grande que el producto de los dos números el cual siempre es un múltiple común. Pero en general existe un múltiple más pequeño que este producto.

Para hallar el **mcm** de dos o más números procedemos como en el caso del MCD, pero escogiendo esta vez los factores en su máxima potencia. Hay que tomarlos donde hay más de ellos.

Ejemplo: ¿Cual es el mcm de 1176, 1764 y 490?

► $1176 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3 \cdot \underline{7 \cdot 7}$

$1764 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{3 \cdot 3} \cdot 7 \cdot 7$

$490 = 2 \cdot \underline{5} \cdot 7 \cdot 7$

1176	$\underline{2}$	1764	2	490	2
588	$\underline{2}$	882	2	245	$\underline{5}$
294	$\underline{2}$	441	$\underline{3}$	49	7
147	3	147	$\underline{3}$	7	7
49	$\underline{7}$	49	7	1	
7	$\underline{7}$	7	7		
1		1			

mcm $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 17640$

Ejercicio: Busca el mcm de los números siguientes:

A) 544
B) 3872
C) 1760

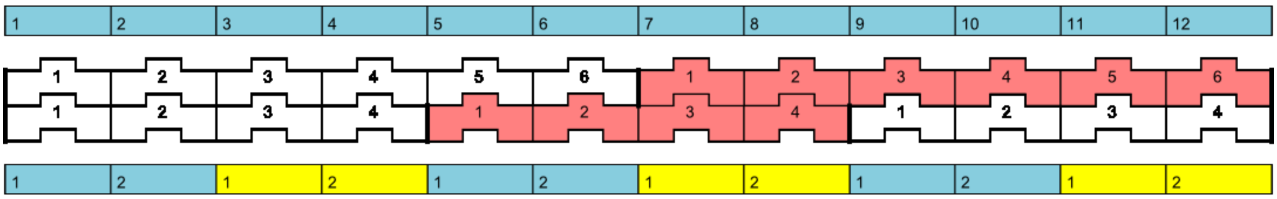
UNA RELACIÓN ENTRE EL MCD Y EL MCM DE DOS NÚMEROS

Si tenemos dos números A y B, se cumple la ecuación siguiente:

MCD (A, B) · **mcm** (A, B) = A · B

Una interpretación gráfica

El clásico juguete de construcción de los niños LEGO (marca registrada) en su forma más sencilla permite combinar elementos de diferentes longitudes, 1, 2, 3, 4, etc. Los niños se suelen preguntar cuales son las condiciones para que se pueda obtener una largadas idénticas juntando diferentes tipos de elementos iguales entre sí. Por ejemplo se preguntan, si es posible obtener una misma largada con elementos de 4 y otros de 6 unidades. Aquí es donde se suele descubrir intuitivamente lo que se llama el **mcm** de dos números:



En seguida nos daremos cuenta que 2 elementos de 6 unidades tienen la misma longitud que 3 elementos de 4. 12 es el **mcm** de 4 y de 6. El MCD de 4 y de 6 es 2, y aplicando la fórmula indicada más arriba podemos comprobar que $4 \cdot 6 = 2 \cdot 12$.

Juntando piezas cuyas longitudes no tienen divisor en común, (piezas con el MCD = 1) nos daremos cuenta que en estos casos el primer punto de coincidencia está situado a una distancia que corresponde al producto de las dos longitudes.

En cambio si una longitud es divisible por la otra, la primera ya es el **mcm** de ambas longitudes. Y la segunda es el MDC. Y se vuelve a confirmar la fórmula.

Cuando alineando en paralelo dos tipos de valores las dos pilas llegan a coincidir en algún lugar, se dice que los dos valores son conmensurables. Dos números enteros siempre son conmensurables entre ellos y coinciden por primera vez cuando suman el **mcm**. Dos fracciones también son siempre conmensurables entre ellas.

Un ejemplo de dos números no conmensurables sería 2 y raíz de 2, $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ no es un numero racional, es un número irracional.

TRANSFORMACIÓN DE LAS FRACCIONES

Existen dos transformaciones imprescindibles para calcular con fracciones, simplificar[3] y ampliar[4]. Las dos procesos tienen en común que el valor de la fracción sobre la que se ha operado permanece inalterado. O sea que la fracción simplificada o ampliada tienen el mismo valor numérico que la original.

Para saber si dos fracciones tienen el mismo valor[5] (son equivalentes), hay una prueba sencilla: en efecto, si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tienen el mismo valor se tiene que cumplir

$\mathbf{a \cdot d = b \cdot c}$

<u>Ejercicios:</u> ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{7}{15}$ y $\frac{5}{11}$?

► $7 \cdot 11 \neq 15 \cdot 5$ // Las fracciones son diferentes

SIMPLIFICAR FRACCIONES

Si cortamos una pizza en 6 sectores iguales entre ellos y comemos 1 de estos sectores, es como si hubiéramos cortado la pizza en 12 sectores para luego comer 2 de ellos. Podemos representar los dos casos por las fracciones $\frac{1}{6}$ y $\frac{2}{12}$.

Mediante el cálculo $1 \cdot 12 = 6 \cdot 2$ podemos determinar que efectivamente ambas fracciones son equivalentes. El paso que nos ha permitido llegar de $\frac{2}{12}$ a $\frac{1}{6}$ se llama simplificar. Las fracciones se simplifican dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Para poder simplificar una fracción, el numerador y el denominador tienen que tener un divisor común. Si simplificamos con el máximo de estos divisores, el MCD, luego ya no se puede simplificar más la fracción, se dice que esta fracción es *irreducible.* En este caso el MCD del numerador y del denominador es igual a 1.

3 También se dice *reducir* una fracción.
4 O *amplificar.*
5 Se habla de fracciones equivalentes.

__Ejemplo:__ **Simplifica** $\frac{240}{360}$ **con 10**

► $$\frac{240}{360}=\frac{240:10}{360:10}=\frac{24}{36}$$

__Ejemplo:__ **Simplifica** $\frac{240}{360}$ **hasta que sea irreducible**

► A) Averiguamos el MCD de 240 y de 360: encontramos MCD (240, 360) = 120

B) Simplificamos $\frac{240}{360}$ con 120: $\frac{240}{360}=\frac{240:120}{360:120}=\frac{2}{3}$

La fracción $\frac{2}{3}$ es irreducible, ya que MCD (2, 3) = 1

__Ejercicio:__ **Simplifica** $\frac{748}{850}$.

Ampliar fracciones

Ampliar fracciones consiste en multiplicar el numerador y el denominador por el mismo factor entero. Igual que en el caso de la simplificación de las fracciones, se obtiene una fracción equivalente.

__Ejemplo:__ **Amplia** $\frac{5}{9}$ **con 7.**

► $$\frac{5}{9}=\frac{5\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{35}{63}$$

SUMAR Y RESTAR FRACCIONES

Ésta es la parte más difícil que requiere emplear todos los conocimientos adquiridos hasta ahora. Para sumar dos (o más) fracciones hay que proceder de la manera siguiente:

A) Hay que buscar el **mcm** de los denominadores. Esto nos da el nuevo dominador que será común a todas las fracciones ampliadas.

B) Luego hay que ampliar las fracciones de tal forma que tengan todos el nuevo denominador común.

C) Sumar los numeradores y mantener el denominador común.

D) Simplificar el resultado para obtener una fracción irreducible.

Ejemplo: Suma $\frac{13}{24}$ y $\frac{11}{36}$.

► A) El **mcm** de 24 y 36 es 72. 72 será el nuevo denominador común.

B) ¿Cómo sabemos con qué número hay que ampliar cada una de las fracciones?

En el caso de la primera fracción hay que obtener el denominador de 72 a partir del antiguo denominador de 24. Evidentemente, dividiendo el nuevo denominador por el viejo, a saber 72 por 24, obtenemos el número con el que se trata de ampliar la fracción: 72 : 24 = 3.

Hay que ampliar por 2 la segunda fracción, ya que 72 : 36 = 2.

Las nuevas fracciones son $\frac{39}{72}$ y $\frac{22}{72}$.

C) Ahora que tenemos fracciones con el mismo denominador, ya las podemos sumar, sumando los numeradores (sumamos valores del mismo tipo, en este caso fracciones con el mismo denominador) $\frac{39}{72}+\frac{22}{72}=\frac{39+22}{72}=\frac{61}{72}$

D) $\frac{61}{72}$ es irreductible, ya que MDC (61, 72) = 1

Ejercicio: **Calcula las sumas y restas siguientes:**

A) $\dfrac{11}{42} - \dfrac{5}{66} = ?$

B) $\dfrac{7}{8} - \dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{16} = ?$

C) $\dfrac{5}{9} - \dfrac{9}{5} = ?$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Afortunadamente multiplicar y dividir fracciones es mucha más fácil que sumarlas y restarlas.

Regla: Se multiplican dos fracciones multiplicando los numeradores entre ellos y los denominadores entre ellos, según el esquema:
$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

Ejemplo: **Multiplica** $\dfrac{12}{55}$ **y** $\dfrac{11}{36}$.

► $\dfrac{12}{55} \cdot \dfrac{11}{36} = \dfrac{12 \cdot 11}{55 \cdot 36} = \dfrac{132}{1980}$

Esta fracción todavía se puede simplificar por el MCD de 132 y de 1980, que es 132, con lo que obtenemos $\dfrac{132}{1980} = \dfrac{1}{15}$.

Regla: Una fracción se divide por otra multiplicándola por el recíproco del divisor. El recíproco de una fracción se obtiene intercambiando el numerador y el denominador.

Ejemplo: **Divide** $\dfrac{7}{36}$ **por** $\dfrac{11}{24}$.

► $\frac{7}{36} : \frac{11}{24} = \frac{7}{36} \cdot \frac{24}{11} = \frac{7 \cdot 24}{36 \cdot 11} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 11} = \frac{14}{33}$. Aquí hemos simplificado la fracción con 12 sin antes multiplicar, una técnica que puede ahorrar mucho trabajo.

Ejercicio: Calcula los productos y cocientes siguientes:

A) $\frac{11}{42} : \frac{5}{66} = ?$

B) $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{4} : \frac{7}{16} = ?$

C) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{25} = ?$

FRACCIONES DECIMALES

Recordaremos aquí brevemente cómo funciona nuestro sistema numérico decimal. Tenemos a nuestra disposición 10 símbolos, las cifras de 0 a 9. El sistema decimal es un sistema posicional, ya que el valor de los números depende de la posición de las cifras dentro de los números. Otros sistemas posicionales son el binario que sólo dispone de dos cifras, 0 y 1, y el hexadecimals con 16 cifras; estos dos sistemas se emplean en la computación.

Si por ejemplo tenemos el número decimal 359 sabemos que se trata de la suma de 9 unidades, 5 decenas y 3 centenas. También se pueden expresar las posiciones mediante potencias de la base del sistema. Ya que cualquier número diferente de 0 elevado a 0 es 1, 10^0 es 1. 10^1 es 10 y 10^2 es 100. Ahora se puede escribir el número 359 como:

$$359 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

Cada número entero se puede expresar de esta forma, sumando múltiples de cifras y potencias de 10 con exponentes que van bajando desde un determinado número p hasta 0.

Los matemáticos expresan un número decimal d entero de la siguiente forma:

$$d = \sum_{i=p}^{0} c_i \cdot 10^i$$

¿Qué pasa si introducimos números decimales con coma[6]? Contemplamos por ejemplo el número 359,24. El 2 representa dos décimas y el 4 representa 4 centésimas. Recordando que una potencia con exponente negativo es el valor recíproco de la potencia con el exponente positivo veremos que una décima, 1/10 o $\frac{1}{10}$ se puede expresar como 10^{-1}. Asimismo 1/100 es 10^{-2}.

Podemos representar nuestra fracción decimal 359,24 de la manera siguiente:

$$359 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

La fórmula matemática que representa una fracción decimal d con p posiciones antes y q posiciones después de la coma es la siguiente:

$$d = \sum_{i=p}^{0} c_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^{q} c_{-j} \cdot 10^{-j}$$

Los sistemas posicionales nos brindan grandes facilidades para efectuar cálculos. En la escuela la mayoría aprenden a sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales[7]. La introducción del sistema decimal en Occidente por los árabes ha contribuido enormemente al progreso y al bienestar de Europa, donde hasta entonces se calculaba con números romanos.

---

6 Se habla de *fracciones decimales.*

7 Los procedimientos aplicados para efectuar cálculos se llaman algoritmos, en honor al matemático árabe Al-Khwarizmi, quién creó muchos en la primera mitad del siglo IX.

CONVERTIR FRACCIONES DECIMALES EN FRACCIONES Y VICEVERSA

Intentamos convertir un número decimal en una fracción. Por ejemplo d = 37,2 es la suma de 37 y de $\frac{2}{10}$.

$$d = \frac{37}{1} + \frac{2}{10} = \frac{370}{10} + \frac{2}{10} = \frac{372}{10} = \frac{186}{5}$$

// El último paso se obtiene
// simplificando

Si queremos obtener una fracción decimal partiendo de una fracción ordinaria, sólo tenemos que efectuar la división mediante el algoritmo habitual:

186 : 5 = 37,2

FRACCIONES DECIMALES PERIÓDICAS

A veces se da el caso de que una división entre dos números enteros no se acaba nunca más. Entonces se repite una cifra decimal o un grupo de ellas hasta el infinito. Se llama *período* a esta cifra o este grupo de cifras.

Ejemplo: Convierte la fracción $\frac{7}{3}$ a la forma decimal.

► $7 : 3 = 2{,}333... = 2{,}\overline{3}$

El 3 después de la coma se repite periódicamente hasta el infinito. Este hecho se simboliza por la línea encima del período.

Ejemplo: Convierte la fracción $\frac{211}{7}$ en la forma decimal.

► $211 : 7 = 30{,}142857142857142857... = 30{,}\overline{142857}$

Aquí tenemos un período de 6 cifras.

Ejercicio: Convierte la fracción $\frac{45}{4}$ en la forma decimal.

Ya hemos visto que es fácil convertir fracciones ordinarias en fracciones decimales. Al principio de este apartado también hemos convertido una fracción decimal a fracción. Pero no hemos contemplado todavía la posibilidad que la fracción decimal que se trata de convertir tenga un período. Un pequeño truco también nos permitirá efectuar la conversión en este caso.

Conversión de decimales periódicos

Ejemplo: Convierte la fracción decimal 7,3333... = $7,\overline{3}$ en una fracción ordinaria.

► Llamaremos x a nuestra fracción.

$$\begin{aligned} 10 \cdot x &= 73{,}3333... \\ x &= 7{,}3333... \\ 9 \cdot x &= 66{,}0000... \qquad // \quad \text{dividir} \\ x &= \frac{66}{9} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

El mismo truco se puede aplicar cuando tenemos períodos de largada superior.

Ejemplo: Convierte la fracción decimal 7,123123123... = $7,\overline{123}$ a una fracción ordinaria.

► Llamaremos x a nuestra fracción.

$$\begin{aligned} 1000 \cdot x &= 7123{,}123123123... \\ x &= 7{,}123123123... \\ 999 \cdot x &= 7116{,}0000... \qquad // \quad \text{dividir} \\ x &= \frac{7116}{999} = \frac{2372}{333} \end{aligned}$$

Ejercicio: Convierte la fracción decimal 2,4676767 = $2,4\overline{67}$ a una fracción ordinaria.

UNA APLICACIÓN: LA REGLA DE TRES

Las reglas de tres son problemas basados en la proporcionalidad entre dos o más valores. Partiendo de una fracción en cuyo numerador se pone la cantidad de salida de aquel de los valores que se busca, se pueden resolver tanto las reglas de tres simples como las compuestas.

REGLA DE TRES SIMPLE

<u>Ejemplo:</u> Siete kilogramos de azúcar valen 5,6 €. ¿Cual es el precio de 4 kilogramos?

► El valor que va a variar y que nos dará el resultado son los 5,6 Euros. Pondremos este valor en el numerador de nuestra fracción:

Situación de partida: $\frac{5{,}6}{1}$ €

Precio de un kg: $\frac{5{,}6}{7}$ €

Precio de 4 kg: $\frac{5{,}6 \cdot 4}{7}$ € = 3,2 €

A veces los resultados varían en proporción indirecta con los valores dados.

<u>Ejemplo:</u> Si 11 personas necesitan 15 días para terminar determinado trabajo, ¿cuantas personas se necesitan para hacer el trabajo en 4 días?

►Aquí el valor que hay que poner en el numerador es 11, ya que el resultado buscado se refiere a personas.

Situación de partida: $\frac{11}{1}$ personas

Si hubiera que hacer el trabajo en 1 día: $\frac{11 \cdot 15}{1}$ personas

Si se tiene que hacer el trabajo en 4 días: $\frac{11 \cdot 15}{4}$ personas = 41,25 personas

Se necesitan 42 personas para cumplir con el trabajo.

REGLA DE TRES COMPUESTA

Pondremos como ejemplo este divertido problema:

<u>Ejemplo:</u> Si una gallina y medio tarda un día y medio para poner un huevo y medio, ¿cuantas gallinas se necesitan para poner 2 huevos en dos días?

►Aquí el valor que hay que poner en el numerador es $1\frac{1}{2}$, que equivale a $\frac{3}{2}$, ya que lo buscado son gallinas.

Situación de partida, para 1 huevo y medio: $\frac{\frac{3}{2}}{1}\text{ gall} = \frac{3}{2}\text{ gall}$

Para 1 huevo: $\frac{3}{2 \cdot \frac{3}{2}}\text{ gall} = 1\text{ gall}$

Para 2 huevos: $2 \cdot 1\text{ gall} = 2\text{ gall}$

Para un día y medio: $\frac{2}{1}\text{ gall}$

Para un día: $\frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{1}\text{ gall} = 3\text{ gall}$

Para 2 días: $\frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{2}\text{ gall} = \frac{3}{2}\text{ gall}$

Podemos solucionar el problema en un solo paso, de la manera siguiente:

$$\text{Número de gallinas} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Evidentemente este ejemplo sólo tiene sentido como ejercicio, ya que no existen gallinas fraccionadas. La respuesta a un problema práctico sería 2 gallinas.

OTRO SISTEMA PARA DETERMINAR EL MCD DE DOS NÚMEROS

Cuando tenemos que trabajar con números grandes, a veces es muy difícil averiguar el MCD de dos de ellos, si no fuera por un algoritmo que debemos al famoso matemático de la Antigua Grecia Euclides. Se trata de dividir con resto (en el ámbito de los números enteros) el número mayor por el menor. Si el resto no es cero, sustituimos el número mayor por el divisor y el menor por el resto y volvemos a hacer la división. Esta operación se repite hasta que el resto sea cero. Entonces el divisor es el MCD de los dos números.

Veamos como funciona el algoritmo de Euclides.

Ejemplo: ¿Cual es el MCD de 24 y de 36?

36	=	1	x	24	+	12
24	=	2	x	12	+	0

36	=	1	x	24	+	12
24	=	2	x	12	+	0

Con un ejemplo tan elemental no se aprecia la ventaja de aplicar el algoritmo de Euclides. Pero ahora presentaremos un ejemplo más laborioso:

Ejemplo: ¿Cual es el MCD de 2.894.115.509 y de 25.410.691?

2.894.115.509	=	113	x	25.410.691	+	22.707.426
25.410.691	=	1	x	22.707.426	+	2.703.265
22.707.426	=	8	x	2.703.265	+	1.081.306
2.703.265	=	2	x	1.081.306	+	540.653
1.081.306	=	2	x	540.653	+	0

Una vez calculado el MCD de los dos números, es fácil averiguar el **mcm** aplicando la fórmula que ya se presentó más arriba:

$$\text{MCD}(A, B) \cdot \textbf{mcm}(A, B) = A \cdot B$$

SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

Ejercicio: $5^3 \cdot 5^4 = ?$

Solución: $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

Ejercicio: $2^3 \cdot 2^4 \cdot 8 = ?$

Solución: $2^3 \cdot 2^4 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^3 = 2^{3+4+3} = 2^{10}$

Ejercicio: **Determina los recíprocos de** $\frac{7}{3}$ **, de** -1 **y de** 5^{-5}.

Solución: $\frac{3}{7}$ -1 5^5

Ejercicio: $2^3 : 2^4 \cdot 16 \cdot 7^0 = ?$

Solución: $2^3 : 2^4 \cdot 16 \cdot 7^0 = 2^3 : 2^4 \cdot 2^4 \cdot 1 = 2^{3-4+4} = 8$

Ejercicio: **Descompón los números siguientes en factores primos: 1287, 141512, 7425**

Solución:

$$1287 = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$$
$$141512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 19$$
$$7425 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$$

1287	3	141512	2	7425	3
429	3	70756	2	2475	3
143	11	35378	2	825	3
13	13	17689	7	275	5
1		2527	7	55	5

$$\begin{array}{r|l} 361 & 19 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Ejercicio: Busca el MCD de los números siguientes:

A) 8075
B) 3179
C) 646

Solución: Primero tenemos que descomponer los 3 números en factores primos:

$$\begin{array}{rcl} 8075 & = & 5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \\ 3179 & = & 11 \cdot 17 \cdot 17 \\ 646 & = & 2 \cdot 17 \cdot 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r} 8075 & 5 \\ 1615 & 5 \\ 323 & 17 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 3179 & 11 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 646 & 2 \\ 323 & 17 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

MCD = 17 // 17 es el único divisir común

Ejercicio: Busca el mcm de los números siguientes:

A) 544
B) 3872
C) 1760

Solución:

$$\begin{array}{rcl} 544 & = & \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{17} \\ 3872 & = & \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{11} \cdot \underline{11} \\ 1760 & = & \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{5} \cdot 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r} 544 & 2 \\ 272 & 2 \\ 136 & 2 \\ 68 & 2 \\ 34 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 3872 & 2 \\ 1936 & 2 \\ 968 & 2 \\ 484 & 2 \\ 242 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 1760 & 2 \\ 880 & 2 \\ 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \end{array}$$

17	17		121	11		55	5
1			11	11		11	11
			1			1	

mcm = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5 · 11 · 11 · 17 = 329120

Ejercicio: **Simplifica** $\frac{748}{850}$.

Solución:

748	=	$\underline{2} \cdot 2 \cdot 11 \cdot \underline{17}$
850	=	$\underline{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \underline{17}$

748	$\underline{2}$		850	$\underline{2}$
374	2		425	5
187	11		85	5
17	$\underline{17}$		17	$\underline{17}$
1			1	

El MCD es 2 · 17 = 34

Simplificando por 34 se obtiene la fracción irreducible $\frac{22}{25}$.

Ejercicio: **Calcula las sumas y restas siguientes:**

A) $\frac{11}{42} - \frac{5}{66} = ?$

B) $\frac{7}{8} - \frac{5}{4} + \frac{7}{16} = ?$

C) $\frac{5}{9} - \frac{9}{5} = ?$

Solución:

A)

42	=	2 · 3 · 7
66	=	2 · 3 · 11

42	$\underline{2}$		66	2
21	$\underline{3}$		33	3
7	$\underline{7}$		11	$\underline{11}$

1		1	

El **mcm** de los denominadores es 2 · 3 · 7 · 11 = 462
Transformando las fracciones obtenemos:

$$\frac{11}{42} - \frac{5}{66} = \frac{11 \cdot 11}{42 \cdot 11} - \frac{5 \cdot 7}{66 \cdot 7} = \frac{121-35}{462} = \frac{86}{462} = \frac{43}{231}$$

B)

8	=	2 · 2 · 2
4	=	2 · 2
16	=	2 · 2 · 2 ·2

8	2	4	2	16	2
4	2	2	2	8	2
2	2	1		4	2
1				2	2
				1	

El **mcm** de los denominadores es 2 · 2 · 2 ·2 = 16

Transformando las fracciones obtenemos:

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{4} + \frac{7}{16} = \frac{14}{16} - \frac{20}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{16}$$

C)

9	=	3 · 3
5	=	5

El **mcm** de los denominadores es 3 · 3 · 5 = 45

Transformando las fracciones obtenemos:

$$\frac{5}{9} - \frac{9}{5} = \frac{5 \cdot 5}{45} - \frac{9 \cdot 9}{45} = -\frac{56}{45} = -\frac{56}{45}$$

Ejercicio: **Calcula los productos y cocientes siguientes:**

A) $\frac{11}{42} : \frac{5}{66} = ?$

B) $\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{4} : \frac{7}{16} = ?$

C) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{25} = ?$

Solución:

A)

$$\frac{11}{42} : \frac{5}{66} = \frac{11}{42} \cdot \frac{66}{5} = \frac{11 \cdot 11}{7 \cdot 5} = \frac{121}{35}$$

B)

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{4} : \frac{7}{16} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{16}{7} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 16}{8 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio: **Convierte la fracción** $\frac{45}{4}$ **a la forma decimal.**

$45 : 4 = 11{,}25$

Ejercicio: **Convierte la fracción decimal 2,4676767 =** $2{,}4\overline{67}$ **a una fracción ordinaria.**

Llamaremos x a nuestra fracción.

$$\begin{aligned} 1000 \cdot x &= 2467{,}6767676... \\ 10 \cdot x &= 24{,}6767676... \\ 990 \cdot x &= 2443{,}00000... \qquad // \qquad \text{dividir} \\ x &= \frac{2443}{990} \end{aligned}$$

ÍNDICE ALFABÉTICO

Al-Khwarizmi (aprox. 780 - aprox. 850)....................19
Algoritmo de Euclides....................24
Amplificar una fracción, ver ampliar una fracción....................14
Base de una potencia....................6
Cifras....................18
Conmensurable....................13
Denominador de una fracción....................4
Euclides (siglo III a.C.)....................24
Exponente de una potencia....................6
Fracción....................4
Fracciones decimales periódicas....................20
Fracciones decimales....................19
Fracciones equivalentes....................14
Fracciones irreducibles....................14
LEGO, juego de origen danés....................13
Máximo común divisor, MCD....................10
MCD, ver Máximo común divisor....................10
mcm, ver Mínimo común múltiple....................10
Mínimo común múltiple, **mcm**....................12, 24
Numerador de una fracción....................4
Número primo....................8
Números enteros....................3
Números irracionales....................5, 13
Números naturales....................3
Números negativos....................3
Números racionales....................5
Período....................20
Potencias....................6
Quebrado, ver fracción....................4
Recíproco, ver valor recíproco de un número....................7
Reducir una fracción, ver simplificar una fracción....................14
Regla de tres....................22
Regla de tres compuesta....................23
Regla de tres simple....................22
Simplificar una fracción....................14
Sistema decimal....................18
Sistemas posicionales....................18
Valor recíproco de un número....................7, 19
¿con qué número hay que ampliar las fracciones que se trata de sumar?....................16